算幾不等式

1001001 bee

本文中，我們看看算幾不等式的證明方法，及基本應用。

1. 兩變數的算幾不等式

定理：設 $a>0, b>0$，則 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$。

這個定理中，a,b 必須是正數才成立。

證明一：$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$。

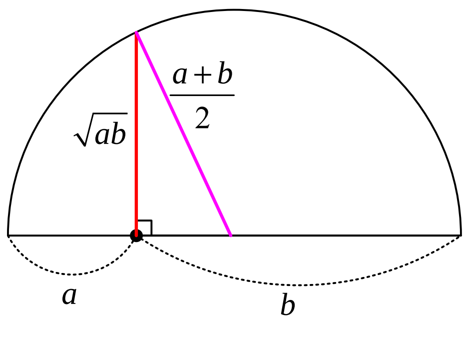
證明一簡潔俐落，是很棒的證明方法。在證明的過程中，看得出來 a,b 必須是兩個正數才行。

問題：499×501 和 498×502，哪一個乘積比較大？

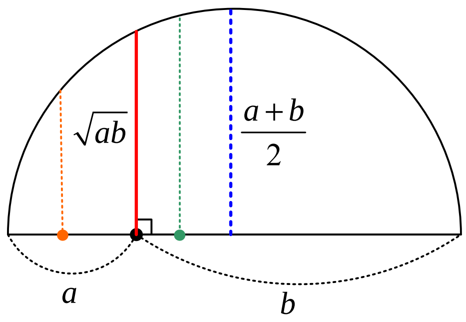
當然，你可以將它們乘開看看，也可以想想看，有沒有妙招可以很快的判定。在算幾不等式中，當 $a+b=1000$ 時，我們可以判定 $\sqrt{ab}$ 的最大值是 $\frac{a+b}{2}=500$，但是沒有辦法判定 499×501 和 498×502 哪一個數比較大？

接下來，我們先看證明二。

證明二：下圖是一個半圓，$a+b$ 是直徑，$\frac{\alpha+b}{2}$ 是半徑，$\sqrt{ab}$ 顯然比半徑短。



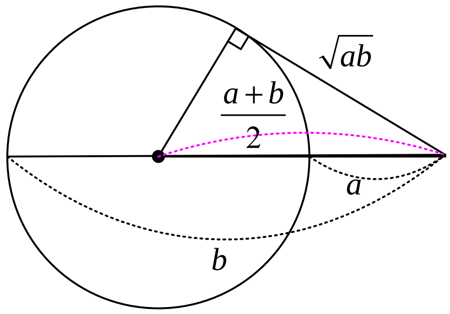
挪動a,b的分點，$\sqrt{ab}$的長度會變動。如下圖所示：當a,b的長度接近了，$\sqrt{ab}$的長度會變大，往$\dfrac{a+b}{2}$靠進，而當a,b的長度拉開了，$\sqrt{ab}$的長度會變小。



圖解算幾不等式，不僅僅是樂趣，我們得到的東西比證明一多。

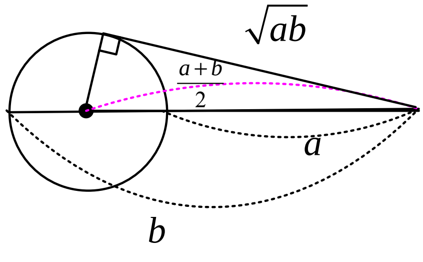
因為a,b靠近，$\sqrt{ab}$(也就是ab)會變大，所以$499\times501>498\times502$。

2. 其他證明法



上面這一個圖很不錯喔！其實，不容易想到的。在這裡也是利用相似三角形，得到圓的外冪性質，進而得到上圖。因為斜邊大於另一股，所以$\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$。但是，看得出來何時相等嗎？又a,b差距接近時，$\sqrt{ab}$會變大嗎？

把$\dfrac{a+b}{2}$鎖定，讓a和b接近(那個圓的半徑縮小)，和證明二有著一樣的效果，圖解真是個很不錯的方式：



3. 多變數算幾不等式

可想而知，用兩次算幾不等式，可得 $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ 是正確的，當然，等號僅僅成立於 $a=b=c=d$ 時。以此類推，$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}$ 也應該是對的。

不過，事實上要證明多變數也是對的，並不容易。僅僅就 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ 就很困難。想想看，可以怎麼作？

把 $\frac{a+b+c}{3}$ 湊成 4 個，即 $\frac{a+b+c+\square}{4}$，這樣可以利用上 $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$，問題是 $\square$ 要放誰呢？讓 $\frac{a+b+c+\square}{4} = \frac{a+b+c}{3}$，$\square$ 放 $\frac{a+b+c}{3}$，呀！這很神來一筆，很難！因此，設 $d=\frac{a+b+c}{3}$。

於是利用 $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$，又 $\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{a+b+c}{3} = d$，因此

$$d \geq \sqrt[4]{abcd},$$

兩邊平方的 $d^4 \geq abcd$，約去 d，得 $d^3 \geq abc$，得 $d \geq \sqrt[3]{abc}$，而 $d=\frac{a+b+c}{3}$，所以

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}。$$

很夢幻的證明，加上 $\frac{a+b+c}{3}$，是很神奇的。這樣從 4 個變數降成 3 個，很厲害。

有了 3 個變數的經驗，那麼 $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5} \geq \sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5}$ 顯然該從 8 個變數降下來，方法一致，而且利用這一個方法，由 2^n 個變數，可以降至你想要證明的任何多個變數，非常奇妙。

當然，有 $\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2}$，$\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1a_2a_3}$，我們也可以得到

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6}{6} = \frac{\frac{a_1+a_2+a_3}{3}+\frac{a_4+a_5+a_6}{3}}{2} \geq \sqrt{(\frac{a_1+a_2+a_3}{3})(\frac{a_4+a_5+a_6}{3})}$$

$$\geq \sqrt{\sqrt[3]{a_1a_2a_3}\sqrt[3]{a_4a_5a_6}} = \sqrt[6]{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}。$$

然後，再由 6 到 5，8 到 7，9 到 3 等，顯然都可以很容易做到。

另外有一方法很神奇，不是用降的，是直接升上去。看一下：

$$\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+\sqrt[3]{abc}}{2}}{2} \ge \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{c\sqrt[3]{abc}}} = \sqrt[3]{abc} ，$$

整理一下，得 $\frac{a+b+c}{2}+\frac{\sqrt[3]{abc}}{2} \ge 2\sqrt[3]{abc}$ ，$\frac{a+b+c}{2} \ge \frac{3}{2}\sqrt[3]{abc}$ ，即 $\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$ 。

這一個方法真的很難，作一下 5 個變數的，當然先假設 4 個變數是成立的：

$$\frac{\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}+\frac{a_5+\sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4}+\sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4}+\sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4}}{4}}{2}$$

$$\ge \sqrt{\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}\sqrt[4]{a_5(\sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4})^3}} = (a_1^{\frac{1}{4}(1+\frac{3}{5})}\cdot a_2^{\frac{1}{4}(1+\frac{3}{5})}\cdot a_3^{\frac{1}{4}(1+\frac{3}{5})}\cdot a_4^{\frac{1}{4}(1+\frac{3}{5})}\cdot a_5^{\frac{1}{4}(1+\frac{3}{5})})^{\frac{1}{2}}$$

$$= a_1^{\frac{1}{5}}\cdot a_2^{\frac{1}{5}}\cdot a_3^{\frac{1}{5}}\cdot a_4^{\frac{1}{5}}\cdot a_5^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5} ，$$

然後，整理一下：$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+3\sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5} \ge 8\sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5}$ ，即

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5} \ge \sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5} 。$$

看完了 2 個例子，由 k 個變數往上升到 $k+1$ 個變數，可以完成嗎？就是如下：

$$\frac{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}+\frac{a_{k+1}+\overbrace{\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_{k-1}}+\cdots+\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_{k-1}}}^{k-1}}{k}}{2}$$

$$\ge \sqrt{\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\sqrt[k]{a_{k+1}(\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_k})^{k-1}}} = (a_1^{\frac{1}{k}(1+\frac{k-1}{k+1})}\cdot a_2^{\frac{1}{k}(1+\frac{k-1}{k+1})}\cdots a_{k+1}^{\frac{1}{k}(1+\frac{k-1}{k+1})})^{\frac{1}{2}}$$

$$= a_1^{\frac{1}{k+1}}\cdot a_2^{\frac{1}{k+1}}\cdots a_{k+1}^{\frac{1}{k+1}} = \sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_{k+1}} ，$$

整理一下：$a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}+(k-1)\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_{k+1}} \ge 2k\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_{k+1}}$ ，即

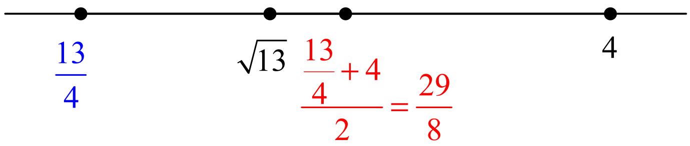
$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}}{k+1} \ge \sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_{k+1}} 。$$

這一個方法真的很驚人，直升。

4. 開平方

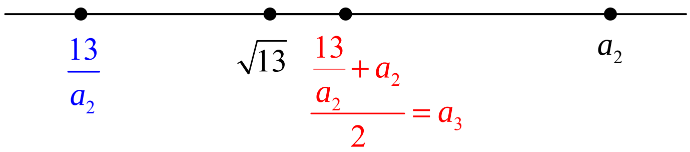
算幾不等式可以用來開方，如果計算機有加減乘除的功能，就可以把開方作的很好。底下我們試試看。

例如要求$\sqrt{13}$。顯然4是大於$\sqrt{13}$中最小的整數。



用13除以4，那$\frac{13}{4}\times 4=13$，可得$\frac{13}{4}<\sqrt{13}<\frac{\frac{13}{4}+4}{2}=\frac{29}{8}$，由上圖可以發現：$\frac{29}{8}$比 4 更接近$\sqrt{13}$，而且是一個大於$\sqrt{13}$的數。

利用上面的方法，把4叫做a_1，$\frac{29}{8}$叫做a_2，然後得到$a_3=\frac{\frac{13}{a_2}+a_2}{2}$，…，$a_{n+1}=\frac{\frac{13}{a_n}+a_n}{2}$，這一連串的數滿足$\sqrt{13}<\cdots<a_n<a_{n-1}<\cdots<a_2<a_1$。



這一個方法逼近$\sqrt{13}$很快，而且不用管中間是否算錯，即使算錯，或有進位的問題，都無所謂，反正越算越準。

用 excel 計算一下$\sqrt{13}\approx 3.605551275$，而利用算幾不等式的方法計算$\sqrt{13}$的近似值如下表：

計算次數 n	a_n	$\frac{13}{a_n}$	a_{n+1}
1	4	3.25	3.625
2	3.625	3.586206897	3.605603448
3	3.605603448	3.605499103	3.605551276
4	3.605551276	3.605551275	3.605551275
5	3.605551275	3.605551275	3.605551275

逼近的速度很快。