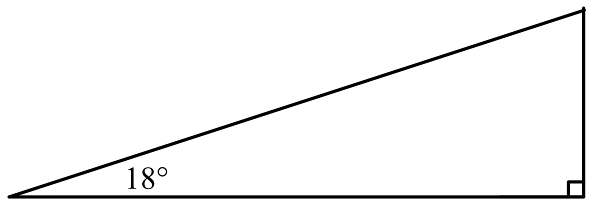
$36° - 72° - 72°$

1020724 bee

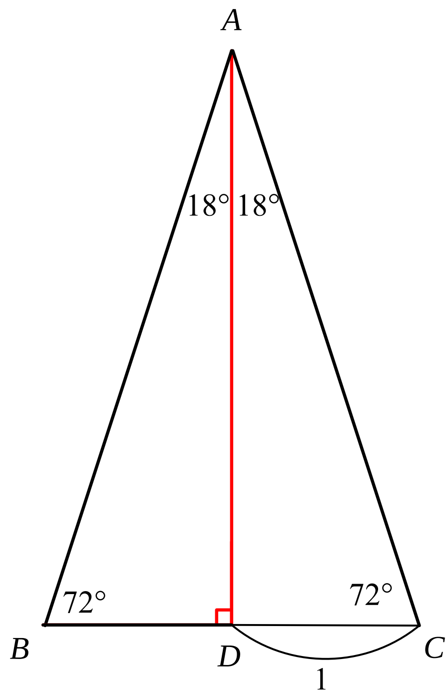
透過相似，我們可以發現 $36° - 72° - 72°$ 這特殊等腰三角形邊的比例關係

我們想知道 $\sin 18°$ 是多少？根據三角函數的定義，我們需要一個直角三角形，如下圖：



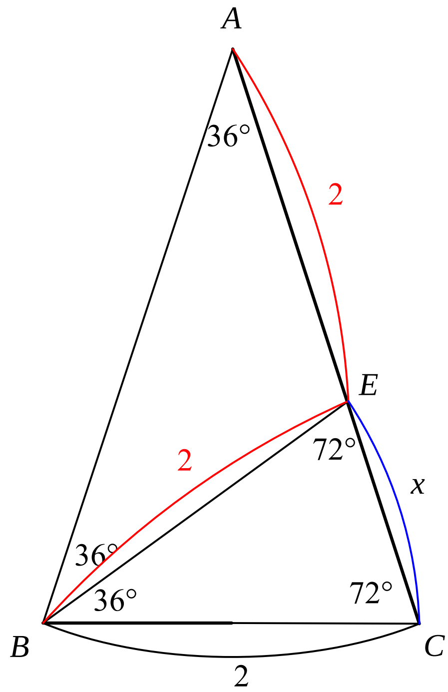
問題是：圖中三角形之三邊長的比例是多少呢？

這是一個難題。我們藉助另一個三角形來幫忙：$36° - 72° - 72°$ 的等腰三角形，如下圖：



把 $\overline{CD}$ 的長度令為 1，如果可以得到 $\overline{AC}$ 的長，那麼 $\sin 18° = \dfrac{1}{\overline{AC}}$ 。

對 $\angle B$ 作角平分線與 $\overline{AC}$ 交於 E 點，得到如下的圖：



因為等腰的關係，我們可以得到 $\overline{AE} = \overline{BE} = \overline{BC} = 2$ ，$\overline{AC} = 2 + x$ 。

利用 ΔABC 與 ΔBCE 相似，可得 $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{CE}}$ ，即 $\dfrac{2+x}{2} = \dfrac{2}{x}$ ，整理得方程式 $x^2 + 2x - 4 = 0$ ，解得 $x = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$ $(-1-\sqrt{5}$ 不合)。

故 $\overline{AC} = 2 + (-1 + \sqrt{5}) = 1 + \sqrt{5}$ ，且 $\sin 18° = \dfrac{1}{\overline{AC}} = \dfrac{1}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ 。

有了 $\sin 18°$ ，你可以自行求出另 5 個 18° 的三角函數值，試試看囉！

因為 $\sin 18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ ，所以

$$\cos 18° = \sqrt{1-\sin^2 18°} = \sqrt{1-(\frac{\sqrt{5}-1}{4})^2} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$ ，

$$\tan 18° = \frac{\sin 18°}{\cos 18°} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{16(5-2\sqrt{5})}}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$$ ，

$$\cot 18° = \frac{\cos 18°}{\sin 18°} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1} = \frac{(\sqrt{10+2\sqrt{5}})\cdot(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{80+32\sqrt{5}}}{4} = \frac{4\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{4} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$$ ，

$$\sec 18° = \frac{1}{\cos 18°} = \frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{4\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{5}$$ ，

$$\csc 18° = \frac{1}{\sin 18°} = \frac{4}{\sqrt{5}-1} = \sqrt{5}+1$$ 。