$\sqrt{2}$ 是無理數

1020905 bee

小高一數學課堂上的第一個苦，認識無理數與「反證法」。

問一個問題。

問題：有理數 (或稱為分數) 那麼多？密密麻麻的。那所有的有理數可以填滿整條數線嗎？

老實說，這個問題很難回答。在國小時候，我是認為所有的長度是可以被量出來的，只要單位夠小，總有一天可以抓到你。聽說古時候的數學家也是這樣認為，其中畢達哥拉斯學派就是這樣主張的。不過，很糟的是：畢達哥拉斯學派也發現一件事：畢氏定理。

利用畢氏定理我們得到一個很有意思的數 $\sqrt{2}$ (如圖 1 所示)，利用圓規我們可以將 $\sqrt{2}$ 搬到數線上去，那麼請問：$\sqrt{2}$ 是我們熟悉的分數 (有理數) 嗎？

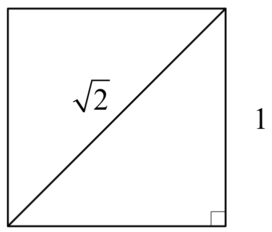

圖 1

假設 $\sqrt{2}=\dfrac{b}{a}$，其中 $a\in N$，$b\in Z$。

因為 $\sqrt{2}$ 是我們不熟悉的數字，所以我們將 $\sqrt{2}=\dfrac{b}{a}$ 兩邊平方，可以得到 $2=\dfrac{b^2}{a^2}$，即 $2a^2=b^2$，仔細看

$$2a^2=b^2，$$

有沒有覺得「怪怪的」，哪裡怪怪的？

因為 a,b 都是整數，所以 b^2 是一個完全平方數，而 $2a^2$ 則不是一個完全平方數，但是兩數竟然是相等的，因此這是一個「錯誤的等式」。

怎會這樣呢？

回顧上面的過程，顯然整個推論的過程都沒有問題，那怎會出現錯誤的等式呢？喔！原來是

假設 $\sqrt{2}=\dfrac{b}{a}$ 是有問題的。因為 $\sqrt{2}$ 根本就不是分數阿！

因為 $\sqrt{2}$ 不可能寫成 $\dfrac{b}{a}$ 的樣子，所以 $\sqrt{2}$ 就一直被寫成 $\sqrt{2}$ 的樣子，因為沒有其他的寫法，所以 $\sqrt{2}$ 這一個「傳神的符號」才會被留著。

$\sqrt{2}$ 可能是第一個被發現的無理數，當無理數被發現後，無理數變成數學的一處寶田，數學家投入研究無理數的發現非常豐富。

$\sqrt{2}$ 是無理數的證明整理如下：

證明：假設 $\sqrt{2}=\dfrac{b}{a}$，其中 $a\in N$，$b\in Z$。

將 $\sqrt{2}=\dfrac{b}{a}$ 兩邊平方，可以得到 $2=\dfrac{b^2}{a^2}$，即

$$2a^2=b^2，$$

因為左式不是完全平方數，而右式是完全平方數，得到是一個錯誤的等式，所以 $\sqrt{2}=\dfrac{b}{a}$ 是一個錯誤的假設，因此 $\sqrt{2}$ 不是一個分數，也就是 $\sqrt{2}$ 是一個無理數。

無理數是不容易掌握的數，而有理數則比較容易親近，我們先假設 $\sqrt{2}$ 是有理數，經由推論，得到錯誤的等式，進而知道 $\sqrt{2}$ 原來不能是有理數，只好判定其為無理數。這樣的推論過程，我們稱之為「反證法」，這是數學上常用的手法。

對了！問各位一件事：我們在前面的討論中證明了什麼？

$\sqrt{2}$ 是無理數 ---- 就僅僅是這樣嗎？還有其他嗎？(先想再看下頁！)

事實上，由上面的證明方法，我們可以知道所有型如 $\sqrt{p}$ 的數（$p \in N$），大多數是無理數。為什麼？

再多一些，$\sqrt[3]{p}$，$\sqrt[4]{p}$，$\cdots$ 也都是。為什麼？

不過，我說大多數是什麼意思？可以更確定一點嗎？

思索？

$\sqrt{2}$ 是無理數有非常多的證明方法，你可以參閱 $\sqrt{2}$ 是無理數的證明，作者是蔡聰明教授 http://w3.math.sinica.edu.tw/math_media/d231/23103.pdf。

至於思索部分，你一定可以想出答案來，下次上課時，你自己給我答案喔！