

# 質數

1020909 bee

說說看！何為質數？

## 1. 何為質數

質數？怪怪的名詞。如果要高中小朋友解釋一下，相信很多人都會說：

質數只有自己和 1 兩個因數。

但是，如果再問：為什麼質數是這樣的意思時？恩！----- 老師說的，課本寫的，我哪知！

是阿！這個說法很數學，就是沒有 fu，數學說法一定沒有 fu 嗎？不合理吧！那到底什麼是質數呢？

這個問題不好答覆，那麼，我們問另一個問題好了。6 是不是質數呢？

當然不是！但是，為什麼呢？

因為  $6 = 2 \times 3$  對嗎？

呀！所以 6 不是質數。那何為質數呢？

是不是有感覺：可以被分解的數不是質數，那麼不能被分解的數，就是質數，於是我們說：

可以分解的數稱為「合成數」，  
而不能分解的數，即「非合成數就是質數」。

由上面的感覺，我們知道質數是不容易理解的，但是，合成數卻是比較容易知道的，因此，用合成數來理解質數，是比較合理的。

想想看：7 是不是質數呢？

要看 7 是不是質數，就是要看 7 可不可以分解，因為 7 不太大，所以試著分解看看，因為分解不開，所以 7 是質數。

但是，那是因為 7 不是很大，如果不是 7，該怎樣判斷這一個數是不是質數呢？

我們的作法是「建立質數表」。

因為 1~100 的質數比較容易判斷，於是我們辛苦的將其建立起來：

1~100 的質數表：2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,  
31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,  
73,79,83,89,97.

注意算一下，共有 25 個質數。

那麼，如果我們碰到大於 100 的數，該怎樣判斷它是不是質數呢？

看個例子：131 是不是質數？

因為質數是「非合成數」，而合成數是可以被分解的意思，所以我們利用質數表來分解 131：

$$131 \div 2 = 65 \cdots 1, \quad 131 \div 3 = 43 \cdots 2, \quad 131 \div 5 = 26 \cdots 1, \quad 131 \div 7 = 18 \cdots 5,$$

$$131 \div 11 = 11 \cdots 10,$$

當我們看到  $131 \div 11 = 11 \cdots 10$  時，很自然的會停，然後判斷「131 是質數」，問題是：為何這樣就知道 131 是質數呢？

答案是：因為商數已經和除數相等了。

如果我們繼續除下去，那麼商數將會小於除數。假設  $131 \div a = b$ ，而  $b < a$ ，那麼

$$131 \div b = a \text{ 應該會「較早」出現是嗎？}$$

所以，判斷一個數是不是質數的方法為：

「如果一個數  $p$  依序利用質數表的數  $2,3,5,\dots,b$  來除都無法整除，那麼  $p$  就是質數。」

看了上面的敘述，我們要問： $b$  有何性質呢？

答案是：如果  $p$  除以  $b$  所得到的商數  $q \leq b$ ，那麼  $b$  就是我們要檢查的最後一個數，而且  $p$  也就是質數。

上面的說法很自然，但是有點彆扭。原因是，我們檢查的方法，其實是判斷一個數是不是「合成數」的方法，所以應該是

如果一個數  $p$  依序利用質數表的數  $2,3,5,\dots$  來除可以被整除，那麼  $p$  就是合成數。如果無法整除，那麼  $p$  則為質數。

只是如果不幸一直無法整除，那麼，我們要想想看，除到質數表中的哪一個數就可以停止了？答案是：當這一個「質數除數」大於或等於  $\sqrt{p}$  時，就不用再除了，因為這樣就足夠讓我們判斷它是一個質數，而非合成數。

「質數除數」大於或等於  $\sqrt{p}$  時，就不用再除了，這是什麼呀？

這真是進階的說法，不過，一點都不難，繼續往下看：

判斷合成數的方法：

如果  $p$  被一個小於或等於  $\sqrt{p}$  的質數整除，那麼  $p$  就是合成數。

因為如果  $p = a \cdot b$ ，而且  $a \leq b$ ，那麼較小的數  $a$  顯然比  $\sqrt{p}$  來的小，即  $a^2 \leq ab = p$ ， $a \leq \sqrt{p}$ ，所以合成數應該在利用質數表中  $\leq \sqrt{p}$  的質數就可以檢查出來，那如果檢查不出來，

判斷質數的方法：

如果  $p$  不能被一個小於或等於  $\sqrt{p}$  的質數整除，那麼  $p$  就是質數。

由上面的討論，我們知道「質數表」非常重要，有質數表，我們才可以檢查一個較大的數是不是質數。事實上，利用  $\sqrt{p}$  的概念，我們知道用 1~100 的質數可以判斷 1~10000 的數是不是質數，而比 10000 更大的數，如 12323 是不是質數，就可能得「擴大質數表」。

證明判斷  $p$  是不是質數的方法如下。

證明：假設  $p = ab$ ，其中  $a \leq b$ ，且  $a$  一個質數，則

$$a^2 \leq ab = p, \text{ 即 } a \leq \sqrt{p}。$$

因此，當  $p$  是合成數時， $p$  有一個小於或等於  $\sqrt{p}$  的質因數，而當  $p$  找不到小於或等於  $\sqrt{p}$  的質因數時， $p$  即為非合成數（質數）。

## 2. 「1」是不是質數

1 是不是質數呢？以「不能分解」當作標準，1 是質數，因為 1 不能被分解，但是，書上都寫 1 不是質數，耶！這到底是怎回事呢？

「可以被分解」，這是一個有意思的感覺。想想看，什麼叫做可以被分解， $6 = 2 \times 3$  就做被分解，那  $7 = 7 \times 1$  呢？

被分解，意思是寫成兩個較小的數的乘積。

因此， $6 = 2 \times 3$  是分解，而  $7 = 7 \times 1$  不是被分解。那跟 1 是不是質數，有何關係呢？

質數除了有不能被分解的特性之外，還要有「可以分解別人」的特性。

呀！所以質數一定要大於 1，不然，就沒有分解別人的功能。

真好，所以正整數有 3 類：質數、合成數和 1。

有句話說：科技來自於人性，那數學何嘗不是來自於「合情合理的感覺」呢？因此，數學的美來自於合理的感覺，與大家分享。