一個算幾不等式的問題

1020913 bee

沒有提示，才有創意。

問題：設 $a>1$，求 $a+\dfrac{4}{a-1}$ 的最小值。

解：將問題改成 $a-1>0$，求 $(a-1)+\dfrac{4}{a-1}+1$ 的最小值時，這一個困難的問題

變成有機會，因為

$$\frac{(a-1)+\boxed{\dfrac{4}{a-1}}}{2}\geq\sqrt{(a-1)\cdot\boxed{\dfrac{4}{a-1}}}$$

可得：$\dfrac{(a-1)+\dfrac{4}{a-1}}{2}\geq 2$，即 $(a-1)+\dfrac{4}{a-1}\geq 4$，即 $(a-1)+\dfrac{4}{a-1}+1\geq 5$，

當 $a-1=\dfrac{4}{a-1}$，也就是 $a=3$ 時，$a+\dfrac{4}{a-1}$ 有最小值為 5。

上面的問題其實很困難，對於高一的小朋友來說，並不容易想到。但是，在不給提示的情形下，同學<u>葉宣甫</u>給了下面的解答。

解：$a+\dfrac{4}{a-1}=\dfrac{1}{a-1}(a(a-1)+4)=\dfrac{1}{a-1}(a(a-1)+4)-5+5$

$$=\frac{1}{a-1}(a(a-1)+4-5(a-1))+5$$

$$=\frac{1}{a-1}(a^2-6a+9)+5=\frac{1}{a-1}(a-3)^2+5\geq 5\text{。}$$

$-5+5$ 真是天外飛來一筆，怎樣產生的，「動腦實驗來的」，真棒！