

# 人生中最重要的一件事：態度

bee\*

104.09.09

新生剛開學，要知道自己的不足。加油！

## 1. 前言

剛剛改完各位的第一次平時考考卷，發現各位在國中的數學基礎打得不好，可能完全沒有自己對數學的想法，只是跟著人家的腳後跟走，更慘的是：以往的學習經驗都是「猜樂透，比運氣」。

不過，學不好沒有關係，只要你願意，就可以慢慢跟上來，只要你願意去試試看！

## 2. 學習的基本方法

首先，我要先說明學習的方法，這些方法可以應用在每一個科目上。

1. **今日事今日畢**：每天回家把今天上課的內容複習一遍，並條理式的重寫一次，寫完老師交代的作業，特別是「主科」。
2. 每一堂課都必須「抄筆記」，而且必須要將黑板上和「老師口頭說的」都抄下來。
3. 課本勝過任何一本參考書，反覆閱讀，理解。
4. 最最重要的一件事：**遠離電玩與手機**，因為，**你沒有多餘的生命可以做這些事情**。

## 3. 念數學的基本方法

念數學要的不是「考題」，而是「大綱」，上完課，你要能夠和別人「聊天」，「聊數學」。不然，你學甚麼呢？

---

\*bee 美麗之家: <http://www2.chsh.chc.edu.tw/bee>

「問題是學習的動機」，但不僅僅是常見的考題，更重要的是「有意義的問題」，例如：在第一節我問過各位的一些問題：

1. 你認識那些數？數的功能為何？
2. 何為「圓周率」？圓周率該怎樣估計？
3. 表示一個數最好的方法是甚麼？為什麼？
4. 何為有理數？如何在數線上找到你想知道的有理數？
5. 何為無理數？哪些無理數是我們常用的？你理解這些「符號的意義嗎」？
6. 何為乘法公式？這些公式哪裡來的？為何需要這些乘法公式呢？
7. 何為算幾不等式？有何實際的應用嗎？它的圖解證明有何用處呢？

面對主要問題，你要給出答案。這時候，你面對的不是填充題，選擇題，而是問答題，是你聊天的題材，如此，你自然會學到很多內容。翻開筆記、課本，回想老師上課說的，細細體會，這些內容會深刻的留在你的腦海很久很久，而且越想越深刻。當然，學習數學的樂趣也才會產生。

閱讀中，思考中，寫習題中，你會產生更多問題，解答更多為什麼，你的數學功力和學習方法，會越來越進步，努力一段時間後，你會對自己的進步感到驚訝。

#### 4. 回顧 1-1 的內容

甚麼是數？老實說你常常在作計算，應該對「數」是很熟悉的，但是一下子之間，卻不知道該怎樣回答這樣的問題。沒有關係，翻開課本，你想一下：在 1-1 的內容中，數是不是一個「表示位置的方法」？在哪裡表示位置，在一條叫做「數線」的直線上。所以我說，數是一個坐標，數線上的坐標，所有表示數線上的坐標，統稱為「實數」。

表示實數最好的方式是「小數」，因為小數很直接了然，一看就懂。所以尋找坐標的方法，最好的是「十分逼近法」。問題是，我們過往的經驗告訴我們：有一種數叫做「分數」，某些情形，它比小數好，它可以直接抓到該點的位置：例如： $\frac{1}{3}$ ，你如果用小數來表示  $\frac{1}{3}$ ，你會面臨寫不完的小數  $0.\bar{3} = 0.333\dots$ ，因此，我們還是保留分數的表示法，同時知道一件事：

分數就是無窮循環小數或有限小數。

數線上除了分數的坐標外，其他還有許許多多的點坐標，根據分數與小數的關係，我們知道「非分數」的坐標，都只能表示成「無窮的不循環小數」，這就有點糗大了。要在數線上標示出這些點的坐標，我們要面臨「寫不完」又「難以掌握」的狀態，因此，在 1-1，我們要學習的重點必然是這些「非分數」的數，我們將其稱為「無理數」，而將分數稱為「有理數」。那些無理數是我們關心的呢？答案是「根式類」的無理數。

例如：

- $\sqrt{2}$  表示自乘後會等於 2 的數，即  $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ 。
- $\sqrt[3]{2}$  表示自乘 3 次後會等於 2 的數，即  $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} = 2$ 。
- $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$  到底是多大呢？或者說，該怎用小數表示？這時候「有理化分母」變成是一個很有幫助的作法，因此，我們需要學習「根式的運算」。

根式類的無理數運算，要多多練習，因為我們對這些數的了解很少，非常陌生，當然要透過練習，才能熟悉。

關於無理數的運算，我們需要一些計算的方法來幫忙，這些方法就是「乘法公式」。

例如： $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ ，利用這一個乘法公式，我們就可以把  $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$  的分母有理化：

$$\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2},$$

乘法公式當然要熟悉，若不熟悉，如  $\frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$  這樣的無理數要有理化分母就很困難。

小數的好處在於很容易比較大小，因此當我們看到兩個小數時，不僅可以感覺到它們的位置，也可以立即說出它們中哪一個數在「右邊」，也就是比較大的數。例如：

$$2.1 > 1.2, 0.\overline{31} > 0.\overline{29}, 0.58 > -9.9, \text{ 甚且是 } 0.\overline{34} > 0.\overline{343} \text{ 等} \dots$$

但是，對於兩個根號類的數，要比較它們的大小就很不容易。例如： $\sqrt{6} + \sqrt{7}$  與  $\sqrt{5} + \sqrt{8}$ 。

正常來說，我們會使用計算機計算

$$\sqrt{6} + \sqrt{7} \approx 2.4495 + 2.6468 = 5.0963,$$

$$\text{而 } \sqrt{5} + \sqrt{8} \approx 2.2361 + 2.8284 = 5.0645,$$

因此， $\sqrt{6} + \sqrt{7} > \sqrt{5} + \sqrt{8}$ ，雖然差距不大。使用計算機找出小數型態的近似值是很棒的事情，有感覺又直接。但是，數學家可以很巧妙的比較兩數的大小關係：

$$(\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 = 6 + 7 + 2\sqrt{42} = 13 + 2\sqrt{42},$$

$$(\sqrt{5} + \sqrt{8})^2 = 5 + 8 + 2\sqrt{40} = 13 + 2\sqrt{40},$$

顯然  $\sqrt{42} > \sqrt{40}$ ，因此  $\sqrt{6} + \sqrt{7} > \sqrt{5} + \sqrt{8}$ 。

數學家真的很厲害，不用計算機就可以比較兩數的大小關係，但是，任給兩個無理數要比較大小真不是一件簡單的事情，例如：

- $\sqrt{2015} - \sqrt{1999}$  和  $\sqrt{2014} - \sqrt{1998}$  孰大？
- $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$  和  $\sqrt[3]{3.61} - \sqrt[3]{1.9}$  孰大？

使用計算機很簡單也很必要的，而使用數學原理則很困難但極為有趣。因為使用數學原理，你得動腦筋去想辦法，而使用計算機就不用動動腦。

看看你的講義，顯然 1-1 不止我上面所說的這些內容，但是，如果你清楚 1-1 要討論的主要內容是我剛剛談的那些事情，其實，應該是夠了。

整理一下 1-1 的上課內容：

- 數線上表示點位置的坐標稱為實數。
- 實數中容易被我們了解即表示的一類數是「分數」，數學上也稱它為「有理數」。有理數以小數來表示，就是循環小數。
- 實數中所有不是分數的數，統稱為無理數。了解無理數是一件困難的事情，以小數型態來表示無理數，必須寫成無窮不循環小數的型態。無理數是 1-1 中我們學習的重點。
- 爲了理解無理數的值，我們常常需要對無理數做一些運算，例如：有理化分母，這時候我們需要乘法公式。
- 比較兩個實數的大小，有一個重要的不等式：算幾不等式。

## 5. 1-1 的弦外之音

1-1 可以談的東西很多，例如在講義中問： $2 + \sqrt{3}$  是不是無理數？這實在是一個很困難的問題，問題是每本參考書都會提？可是我卻在課堂上說我不講解，那麼由你想想看：你怎樣回答這一個問題呢？你的「fu」是什麼呢？

感覺上， $\sqrt{3}$  是無理數，當然  $2 + \sqrt{3}$  是無理數，問題是要「證明」？怎辦？

因爲  $\sqrt{3}$  是無理數，所以  $\sqrt{3}$  的小數部分必然是無窮的不循環小數，即

$$\sqrt{3} = 1.732050807\dots, \text{ 其中 } 0.732050807\dots \text{ 是無窮不循環小數。}$$

現在在整數部分增加 2，並沒有影響到小數部分，因此， $2 + \sqrt{3}$  的小數部分依然是「無窮不循環小數」，故  $2 + \sqrt{3}$  是無理數。

呀呀！沒有書這樣寫吧！我不是說它很難嗎？怎這樣簡單呢？你可以理解我的上面的說法嗎？

那  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  是不是無理數呢？你的想法呢？

又我們知道  $\pi$  是無理數，那  $\pi \times \pi$  呢？

類似這樣的問題很多，是數學系的朋友的專長，事實上，對於數學專長的人來說，要證明一個實數是無理數，也不是一件很簡單的問題。你知道有這樣的問題就很棒了。

參考書常問：無理數加上無理數是不是無理數，老實說，「當然是」！不是才怪！除非...，除非甚麼？

那個無窮不循環的小數部分被消掉了。

喔！所以  $\sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 1$  不是無理數，是嗎？(我為何不寫  $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$  呢？) 這是一個很簡單的「反例」。不過，知道這種反例沒有啥特別的意義，我們想知道的是  $\sqrt{2} + \pi$  是無理數嗎？隨便兩個「不同類型的無理數相運算」是無理數嗎？這種問題才深刻，才困難。

1-1 的弦外之音真是很多很多，對你們而言，實在是非常困難。以前的高中生會證明  $\sqrt{2}$  是無理數，現在已經把它變成附錄了。不教它的原因不再於「背出它的解答」很困難，而在於要能理解它的內涵很困難。

## 6. 1-1 的重要不等式

上週我寫各位的第一篇小文章是「算幾不等式」，雖然我沒有把它寫到最詳細，但是已經比大部分你可以看到的參考資料詳細很多。這一個不等式很好用，其證明的方法也非常有趣。你除了把它弄清楚，熟知起來後，還可以自己想想看，可以怎樣證明這一個重要的不等式。

算幾不等式有條件，等式成立的時候也有條件。你要去詳細證明或圖解，才能理解條件的必要性。算幾不等式的證明是簡單的，但是你可以從證明的過程中了解到高中數學和國中數學之間的差異，對於你未來三年學習高中數學的態度，有很大的啟發。

## 7. 結語

因為時間關係，我沒有打非常多的東西給你，只是希望你看完我的說明後，可以學到一些東西。如果時間允許，我會把它再修整過，然後放到網路上去。

上高中，是你人生面對壓力的開始，將來的路會很辛苦，非常辛苦 (我不是故意嚇你的!)，但是，也因為很辛苦，才可能「樂趣無窮」。

最後叮嚀你一句：

要打從心底相信老師的話，努力貫徹，才可能完全發揮你的潛力。  
加油！

## 8. 習題

1. 再默寫一次 8 個乘法公式，如果你不確定你寫的是否是正確的，請乘開看看。
2. 想想看：為何分數又稱為「有理數」。上網查查看數學傳播的文章 — 再說  $\sqrt{2}$  是無理數，裡面談到為何將分數稱為有理數的原因。
3. 舉三個小數型態的無理數。
4. 完成講義中所有和「根號運算」的練習題。
5. 重新敘述「算幾不等式」，你試試看，可以做一個屬於你自己的圖解證明嗎？
6. 找幾個和「算幾不等式有關的問題」。
7. 想想看：怎樣估計圓周率的大小。
8. 挑出你不會的問題，繼續想下去，或者找時間問我，或者我寫些小文章給你們參考。
9. 在筆記本上找一頁，再次寫下你所知道的 1-1 的相關內容。
10. 上課要認真聽，常常問自己：到底在學些甚麼？