微積分基本定理

bee*

104.09.10 ～ 104.09.13

歷史上的一大步，是累積了許多前人的一小步。

1. 前言

微積分基本定理整合了微積分的兩個運算 :「 微分 」與「 積分 」，其主要的目的是「 求面積 」。求怎樣的面積呢？求「 函數 」與「 x 軸 」之間的面積。求面積一直是古早數學家很想處理的問題，但是都找不到很簡單的方法可以做到，直到牛頓與萊布尼茲發現了「 面積 」與「 高函數 」之間的關係，才有重大的突破。

2. 基本定理的敘述

微積分基本定理： 設 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 是一個連續函數，並設 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$，

則：(1) $F:(a,b)\to\mathbf{R}$ 是一個可微函數，且 $\dfrac{dF}{dx}=f$。

(2) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=F(b)$。

這個定理很有意思！定理說：對於任意的連續函數 f，計算面積的函數 $y=F(x)$ 和原函數 f 有一個簡單的關係 $\dfrac{dF}{dx}=f$，如果我們可以透過這一個關係找出 $F(x)$，那麼我們想要計算的面積就可以用函數值 $F(b)$ 來表示。如圖 1 所示：

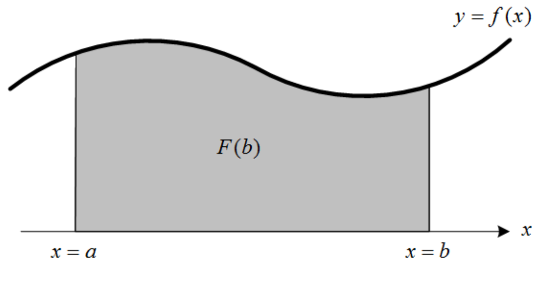

圖 1: 微積分基本定理的圖解

*bee 美麗之家: http:/www2.chsh.chc.edu.tw/bee

因爲「只要」找到函數 F 就可以知道圖 1 中灰色部分的面積，因此，我們稱 F 爲面積函數。

面積函數寫成 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 是一個「不容易看懂」但「非常有趣」的寫法，我們很想知道爲何數學式子會寫成這個樣子，又其意義爲何？

另外你可能想知道，爲何微積分基本定理要分成 (1), (2) 兩個部分，有其特別的意義嗎？

3. 面積的定義 — 黎曼積分

要瞭解「求面積」(積分)，首要清楚何爲面積？

面積的概念來自於長方形的面積：長乘以寬。雖然長方形的面積之定義得來自於實數的建構，但是在這裡我們暫時不理它，直接拿來用。然後採取古早古早數學家就知道的「分割法」來定義函數 $y=f(x)$ 與 x 軸之間的面積，而這也就是有名的「黎曼和」。

黎曼和：設函數 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$，則由直線 $x=a, x=b$, x 軸與曲線 $y=f(x)$ 所圍成的面積定義爲：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

其中我們將區間 $[a,b]$ 分割成 n 個區間 $[t_0,t_1],[t_1,t_2],\cdots,[t_{n-1},t_n]$，$t_0=a, t_n=b$，而 x_i^* 是區間 $[t_{i-1},t_i]$ 中的一個值，$\Delta x_i=t_i-t_{i-1}$。

上面這一個定義實在很複雜，對於初學者來說很困難，不過沒有關係，讓我們畫個圖看看：

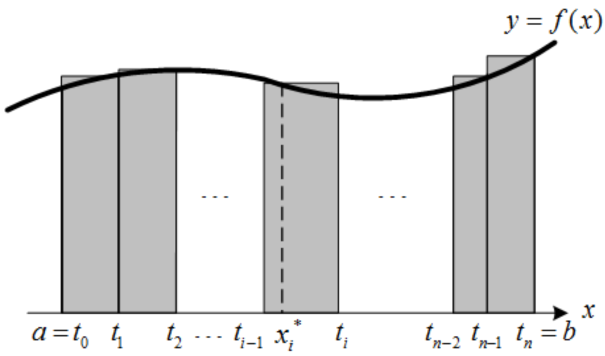

圖 2: 黎曼和的圖解

根據圖 2，作一些說明：

- 把區間分成 n 個，我們稱之爲「分割」(不一定是均等分割)。
- 在每一個區間內選取一個點 x_i^*，然後以 $f(x_i^*)$ 當作高，每個區間的長 $\Delta x_i=t_i-t_{i-1}$ 當作寬，而 $f(x_i^*)\Delta x_i$ 的值的意思就是一個長方形的面積。
- 我們把選取的長方形面積總和當作曲線 $y=f(x)$ 和 x 軸在直線 $x=a$ 與 $x=b$ 之間所圍成的面積。這樣的作法顯然有風險，但是我們期待：當分割的區間數越多時，則我們的選取方

法會越來越好，甚且在「極度細小的分割下」(取極限) 可以達成「找到面積」的目標。

- 要留意，$f(x_i^*)$ 的值不一定是一個正數，因此，$f(x_i^*)\Delta x_i$ 所表示出來的面積是一個「可正可負」的「有向面積」。
- 雖然上面的定義，提供了一個計算面積的方法。但是，事實上，它只是一個定義，因爲在這一個定義下，可能不是所有函數之黎曼和的極限值都存在，所以我們並沒有辦法知道「面積是否存在」? 又這一個定義很難執行，在任意分割下求取面積的極限是極度困難的工作，因此，它不會是一個「理想的方法」。
- 上面的分割可以採用「均等分割」嗎？如果可以，是不是黎曼和的定義會簡單一點呢？

看過上面的說明，可以知道黎曼和定義採用的是大家原本就知道用來求「非多邊形區域面積」的傳統方法，並不會超出你的想像很遠，問題是：這件事難度很高！於是我們不禁想問：

- 那種函數的黎曼和是存在的呢？
- 求黎曼和有簡便的方法嗎？
- 把黎曼和的定義改成如下的樣子，好嗎？

黎曼和： 設函數 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$，則由直線 $x=a, x=b, x$ 軸與曲線 $y=f(x)$ 所圍成的面積定義爲：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i^*)\cdot\frac{b-a}{n}\right]$$

其中 x_i^* 是區間 $[a+\dfrac{(i-1)(b-a)}{n}, a+\dfrac{i(b-a)}{n}]$ 中的一個值。

結論是：只要 $y=f(x)$ 是一個連續函數，那麼，上面的問題都好解答。

- 連續函數的黎曼和必然存在。
- 連續函數可以利用微積分基本定理求到其黎曼和。
- 作均等分割就可以定義黎曼和了。

把 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i^*)\cdot\frac{b-a}{n}\right]$ 這一個數學式子美化後，就得到 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$，這眞是一個美麗的數學符號。其中 dx 表示極小分割的長度 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}$，$f(x)dx$ 就是長方形面積，$\displaystyle\int_a^b$ 指的是從 $x=a$ 到 $x=b$ 之間的面積。妙哉！

4. 待解決的問題

接下來我們剩下兩件事情該做：

1. 證明微積分基本定理是正確的。
2. 把你知道的各種連續函數拿來試試看！這就變成了「積分學」。

在高等微積分中，證明微積分基本定理必然是一件很重要的事情 (但這不是本文要做的事情)，而在初等微積分中，我們至少要把「基本函數的積分」做到透徹。事實上，積分這個動作是很困難，有太多問題要討論，其中有很多問題事實上做不出來，因此，該學的積分技巧很多，而對於無法做出來的積分問題，就會出現「數值分析的方法」。因爲積分這件事很困難，所以這裡會有許多寶藏。你能做的事情就是「不停的練習」，一直到「極度熟練爲止」。

5. 再看微積分基本定理

我們把微積分基本定理再看一次。

微積分基本定理： 設 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 是一個連續函數，並設 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$，

則：(1) $F:(a,b)\to\mathbf{R}$ 是一個可微函數，且 $\dfrac{F}{dx}=f$。

(2) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=F(b)$。

- 定理的唯一條件是 f 是一個連續函數，這說明在連續函數下，我們可以做求面積的工作。
- 設 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$，表示我們期待黎曼和是可定義的，其極限值是存在的，這樣就有計算面積的意義。
- 我們得到的結論 (1) 是 F 是一個函數。呀！這眞棒，這表示當 f 是一個連續函數時，F 的函數值是存在的 (數學上稱爲 well-defined)，也就說明黎曼和是存在的 (是可以求面積的)。
- F 不是一個單純的函數而已喔，它是可微的。事實上，當 f 連續時，我們觀察其面積變化是「很溫和的」(數學上稱爲可微)，仔細一看，這是很自然的事情。
- 將 F 微分後將得到 f，呀！這樣子我們就把「面積函數 F」和「原函數 f」拉上關係了。
- 如果你可以找到函數 F，那麼，根據 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$，你就可以得到第二個結論 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=F(b)$。

不過翻開微積分課本，幾乎所有課本敍述的微積分定理皆分成如下兩個部分，和本文的敍述有所不同，想想看！爲何寫法不同？

微積分基本定理：

I：設 $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ 是一個連續函數，並設 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$，

　則 $F : (a,b) \to \mathbf{R}$ 是一個可微函數，且 $\dfrac{dF}{dx} = f$。

II：若 $G : (a,b) \to \mathbf{R}$ 是一個可微函數，且 $\dfrac{dG}{dx} = f$，

　則 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$，並記爲 $G(x)|_a^b$。

本文一開始就問過一個問題：$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ 爲何寫成這個樣子？這是一個積分式子，有上限 x，下限 a，在微積分課本中稱之爲「定積分」。不過，一般定積分的上下限是固定的，而這裡的上限 x 是變動的。於是，在 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ 中，當你計算面積時，t 在動，x 不動，而當你求面積後，我又把 x 當變數，讓它動，於是，定積分 $F(x)$ 就形成一個 x 的函數，是一個面積函數。

雖然我們在 x 軸上求面積，理當變數是 x，但是避免和後面的動作發生重複符號的情形，所以請 t 來幫忙。如圖 3 所示：

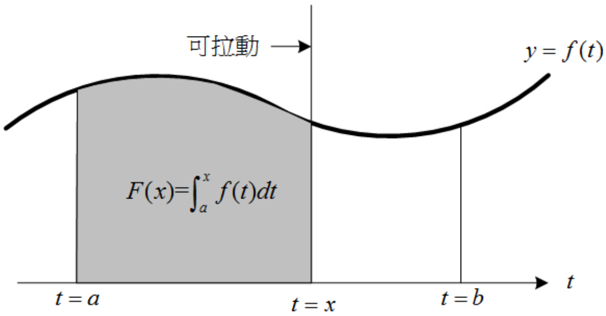

圖 3: $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ 的圖解

因此在定理 I 中告訴我們：F 是一個 well-defined 的函數，而且 F 和 f 有一個很棒的 $\dfrac{dF}{dx} = f$ 的關係。

但是找面積函數卻不一定要找 F。在定理 II 中告訴我們：只要你找到一個函數 G，滿足 $\dfrac{dG}{dx} = f$，那麼，你就可以用 $G(b) - G(a)$ 來當作定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ 的值。

為什麼？

因爲滿足 $\frac{dG}{dx}=f$ 這種關係的函數很多，不是恰有一個而已。事實上，這些函數都只差一個常數，即 $G=F+k$。因此，以代數的計算觀點來看：

$$G(b)-G(a)=(F(b)+k)-(F(a)+k)=F(b)-F(a)=F(b)-F(0)=\int_a^b f(x)dx$$

而實際意思是：$G(x)=\int_c^x f(t)dt$，它是從某一個 c 點出發所計算出來的面積函數，雖然不一定和 a 值相同，但是，利用面積差就可以得到我們想知道的定積分 $\int_a^b f(x)dx$，如圖 4 所示：

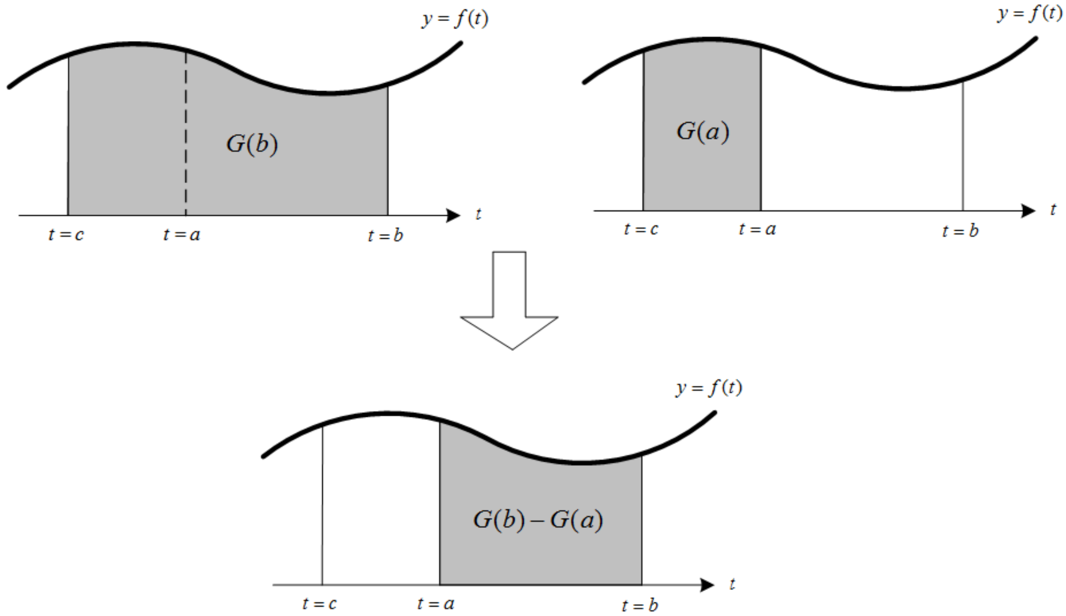

圖 4: $\int_a^b f(t)dt=G(b)-G(a)$ 的圖解

如果你想用本文的微積分基本定理，那麼你尋找的函數 F 必須滿足兩個條件：

1. $\frac{dF}{dx}=f$。

2. $F(a)=0$。

事實上這樣做也很好，我們把 $F(a)=0$ 當作函數 F 的一個條件，也就是要找滿足這條件的 F，如此，$\int_a^b f(t)dt$ 就等於函數值 $F(b)$。

6. 結語

每一個定理的發展，都是累積很多數學家的想法而成的。

打這一篇文章花掉我不少時間，原則上我也校稿過一次，做許多修改，當然我知道，再看一次，又會更動很多。同時，在打這篇文章時，我又學到許多 xelatex 的技巧，眞是收穫滿滿。

本文只是一個引子，想說明要理解一個定理需要花很長的時間，不停地思索，每次思索，就會

有更深刻的認識。特別是，當你必須擔任講解者的身分時，你就會有更多的收穫。

這是本文的第一版，希望我有空再做更新，也希望看本文的讀者，投入更多的時間，享受你的研究樂趣。