

根式的基本意義

bee*

104.09.15 ~ 104.09.16

簡單介紹根式的意義。

1. 前言

在 1-1 我們知道數線上的點坐標統稱為實數 (real number)，實數分成兩類，一類是分數，另一類是無理數。因為我們把分數 (ratioal number) 陰錯陽差的 (因為母音的關係，多加了 n) 寫成有理數 (ratio-n-al number)，於是，ir-ratio-n-al number 就變成了無理數 irrational number。

無理數非常多，也非常難以理解，因此，我們只能先學習較簡單的「根式類無理數」。怎樣是根式類的無理數呢？我們把符號和一些基本代換做簡單的說明。

2. 根式符號意義

這是一個簡單的問題，但是很難回答。原因是：不知道怎樣把這一個數表示出來？ $a = 1.4$ 嗎？計算一下 $1.4^2 = 1.96$ ，那 a 「差不多是」 1.4 ，於是你會在小數點以下多一位 (十分逼近法)：找 1.41 ，於是再計算一下： $1.41^2 = 1.9881$ ，雖然好一點，但是還是差不多。事實上你可以感覺出來，將一個有限小數平方，怎可能變成整數呢？因為找不出表示 a 的好方法，只好創造一個符號來表示 a ，這一個符號就是 $\sqrt{2}$ 。

$\sqrt{\quad}$ 這一個符號來是於 root (方根) 的第一個字母 r ，把 r 拉長後，就變成了 $\sqrt{\quad}$ 。

問題：設 b, c 是一個實數，若 $b^3 = 2, c^4 = 2$ ，則 b, c 該如何表示？

我們用 $\sqrt[3]{2}$ 表示 b ， $\sqrt[4]{2}$ 表示 c ，即

1. $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2$ ；

2. $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2} = 2$ 。

*bee 美麗之家: <http://www2.chsh.chc.edu.tw/bee>

以此類推，我們知道 $\sqrt[n]{2}$ 表示： n 個 $\sqrt{2}$ 的連乘積是 2。例如：

$$\sqrt[7]{2} \cdot \sqrt[7]{2} \cdot \sqrt[7]{2} \cdot \sqrt[7]{2} \cdot \sqrt[7]{2} \cdot \sqrt[7]{2} \cdot \sqrt[7]{2} = 2$$

問題： $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$ 是啥意思？

由前面的討論我們知道： $(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^3 = \sqrt{2}$ ，又 $(\sqrt{2})^2 = 2$ ，因此

$$\left((\sqrt[3]{\sqrt{2}})^3 \right)^2 = (\sqrt[3]{\sqrt{2}})^{3 \times 2} = (\sqrt[3]{\sqrt{2}})^6 = 2$$

於是我們可以得到： $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$ 。

問題：請化簡 $\sqrt[6]{4}$ 。

因為

$$\sqrt[6]{4} = \sqrt[3]{\sqrt{4}} = \sqrt[3]{2}$$

於是我們知道 $\sqrt[6]{4} = \sqrt[3]{2}$ ，類推可得 $\sqrt[mn]{k^m} = \sqrt[n]{k}$ ，再舉一例：

$$\sqrt[12]{81} = \sqrt[4 \times 3]{3^4} = \sqrt[3]{3}$$

3. 根式的乘法與除法

問題： $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = ?$

簡單來想： $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$ 。那 $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3} = ?$ 類推可得：

$$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2 \times 3} = \sqrt[3]{6}$$

問題： $\sqrt[3]{3} \times \sqrt{2} = ?$

$$\sqrt[3]{3} \times \sqrt{2} = \sqrt[6]{3^2} \times \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{9 \times 8} = \sqrt[6]{72}$$

作乘法時，把根號化成同次的開方，那麼就可以作乘法，將它們乘起來。

問題： $\sqrt[3]{2} \div \sqrt{3} = ?$

$$\sqrt[3]{2} \div \sqrt{3} = \frac{\sqrt[6]{2^2}}{\sqrt[6]{3^3}} = \sqrt[6]{\frac{4}{27}}$$

如果你對於 $\sqrt[6]{\frac{4}{27}}$ 不滿意，可以再整理：

$$\sqrt[6]{\frac{4}{27}} = \sqrt[6]{\frac{4 \times 27}{27 \times 27}} = \sqrt[6]{\frac{108}{3^6}} = \frac{\sqrt[6]{108}}{3}$$

當然，你也可以一開始就先有理化分母

$$\sqrt[3]{2} \div \sqrt{3} = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt[6]{3} \times \sqrt[6]{27}}{3} = \frac{\sqrt[6]{108}}{3}$$

4. 結語

根號類無理數是很重要的實數，我們除了要認識它們符號的意思之外，對於它們之間的變換與乘除法要非常熟練。

最後問一個問題： $\sqrt[3]{2}$ 該怎樣讀呢？

答案是：2 開 3 次方 (或簡單為 2 開 3 方)。

希望你們看完後很有收穫！