多項式函數

bee*

104.10.02 ∼ 104.10.02

我一節課就把它上完了！
怎會這樣？到底 2-1 在說些甚麼？

1. 前言

從第二章開始，我們就進入了函數的世界。

函數，把兩個變數拉在一起的「關係」，有了函數這樣的概念，我們可以做很多的研究。

研究函數從最簡單的函數開始：多項式函數。第二章就是講多項式函數。

課本 2-1 就是多項式函數的引言，是一個起頭，我花了 1 小時就把它講完了，然後請同學回家把課本看完。可惜，同學沒有習慣自己看課本，所以經過了 2 個星期，同學們並沒有把 2-1 的內容統整起來。

以我而言，細節固然重要，但是大綱更是關鍵，有地圖，才有機會沿巷逐弄慢慢看。

底下是我對 2-1 的感覺。

2. 低次函數

我在課堂上要各位畫出 4 個函數：

1. $y = 2$
2. $y = -3x + 2$
3. $y = x^2 - 3x + 2$
4. $y = x^5 - 3x + 2$

*bee 美麗之家: http:/www2.chsh.chc.edu.tw/bee

其中前三個函數大家是很熟悉的，也很容易就畫出圖來。

首先，$y = 2 = 0 \cdot x + 2$，是一個常數函數。常數函數中，x 沒有啥作用，此函數圖形是一條水平線，如圖 1 所示。

其次，$y = 2 = (-3) \cdot x + 2$，是一個一次函數。x 前面有個係數 -3，-3 告訴我們：當 x 增加 1 時，y 會增加 -3。此函數圖形是一條「斜直線」，這一條直線顯然會通過點 $(0, 2)$，再利用 -3 可以將此函數的圖形繪製如圖 2，同時知道 $\overrightarrow{v} = (1, -3)$ 表示直線的方向，並將數 -3，稱爲此直線的「斜率」。

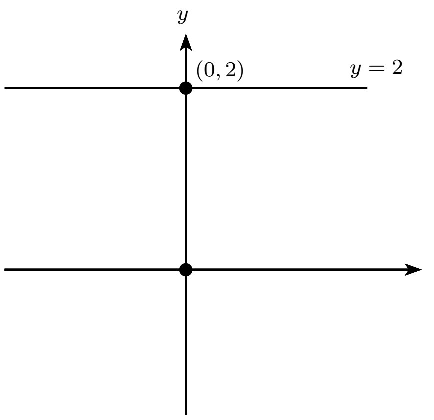

圖 1: 常數函數圖形

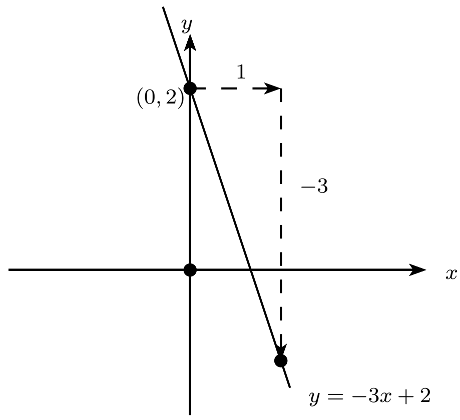

圖 2: 一次函數圖形

再來，畫出 $y = x^2 - 3x + 2$，有兩個方法：

方法一：配方。

$$y = x^2 - 3x + 2 = (x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + (\frac{3}{2})^2) + \frac{-9}{4} + 2 = (x - \frac{3}{2})^2 + \frac{-1}{4}，$$

可得拋物線的開口向上，頂點爲 $(\frac{3}{2}, \frac{-1}{4})$，對稱軸爲 $x = \frac{3}{2}$，如圖 3 所示。

方法二：因式分解。

$$y = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)，$$

可得拋物線的開口向上，和 x 軸相交於兩點 $(1, 0), (2, 0)$，利用二次函數有對稱軸的概念，可得：對稱軸爲 $x = \frac{3}{2}$，進而得到頂點爲 $(\frac{3}{2}, \frac{-1}{4})$，如圖 4 所示。

想一下：哪一個方法好呢？

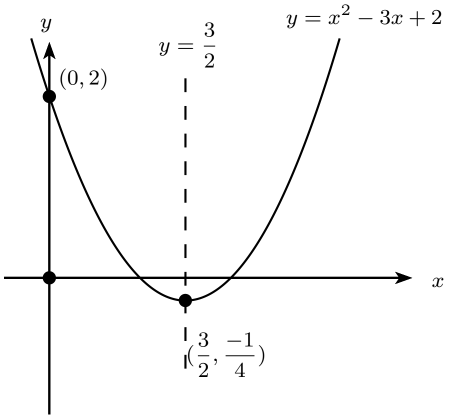

圖 3: 配方法

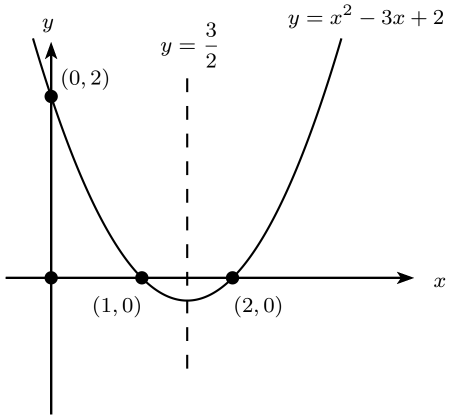

圖 4: 因式分解

研究過某個二次函數之後，我們把特例變成「一般情形」。

1. 配方法：

$$\begin{aligned} y=ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\qquad \frac{b}{a}x+\qquad\right)+c \\ &= a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+(\frac{b}{2a})^2\right)+c-\frac{b^2}{4a} \\ &= a\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a} \end{aligned}$$

可見：頂點爲 $\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$，對稱軸爲 $x=\frac{-b}{2a}$。

2. 因式分解法：

$y=ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(y-\beta)$[1]

可得：拋物線和 x 軸的交點爲 $(\alpha,0),(\beta,0)$。再利用拋物線的對稱性得對稱軸爲 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$，頂點爲 $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},f(\frac{\alpha+\beta}{2})\right)$。

當然，一個拋物線和 x 軸不一定會有交點。利用配方法，我們知道
(1) 只有當 $b^2-4ac>0$ 時，才有兩個相異交點。
(2) 當 $b^2-4ac=0$ 時，恰有一個交點。
(3) 當 $b^2-4ac<0$ 時，沒有交點。

於是，這裡會形成另一個需要討論的主題：拋物線的圖形與 x 軸的關係。

但是只有研究二次函數太簡單了，可以畫出高於二次的多項式圖形嗎？

[1] α 念作 alpha，β 念作 beta

3. 高次多項式

接續上面的討論，把我們目前不會畫圖的多項式稱爲高次多項式，也就是「三次或高於三次」的多項式。老實說，我們應該眞的是不會做的。於是，找個例子看看：$y = x^3 - 3x + 2$。

這一個例子一定是被設計過的，原因是，它可以被「特殊處理」，至於該如何特殊處理呢？不是本次月考的重點，但是引發出幾種可能的方法：

1. 可以先處理單項式 $y = x^n$，然後再疊加起來嗎？
2. 可以「因式分解」嗎？
3. 有沒有特殊的性質呢？這也就是我另一篇文章「奇函數偶函數」的目的。

4. 結語

短時間要各位把唸書的方法做一個很大的改變，確實是非常困難的事情。但是，如果沒有這樣做，那只是依賴「短期記憶」[2]度過這一段學習時間，然後甚麼都不記得。

我常常跟各位說：要默寫，就是希望你靜下來好好的思考上課的內容，同時自己把它寫下來。其關鍵不在默寫的一模一樣，而是要問自己：爲何這內容要這樣演化呢？因此，你的默寫內容並不會和我寫的完全相同，但是，內容會相仿，或者有更多的內容或「產生更多問題」(本篇文章其實就是一篇默寫)。

常常默寫是非常重要的事情，不然，你就是甚麼都不會。

在文首的 4 個函數中，最後一個是 $y = x^5 - 3x + 2$，而非 $y = x^3 - 3x + 2$。這是有意思的，其實我們可以挑戰更高次的函數，當然，它還是被設計過的，而不是一般情形。

描繪函數圖形有幾個基本的方法：

描點 + 對稱 + 因式分解 + 漸近線 + 微分

高中是大學的跳板，大學是「學術研究」的殿堂，建立好態度，你才能在這地方帶走美好的學習成果。

[2]記憶只有兩種：短期和長期，短期就是不會記得。