除法原理與綜合除法
的終極演出 ———— 餘式定理

bee[*]

104.10.14 ∼ 104.10.14

多做練習容易，思索課程內容困難；唯兩者缺一不可。

1. 綜合除法舞台秀

我們知道綜合除法的特點是：把長除法的篇幅減少了。但是，減少篇幅的美妙處在哪裡呢？底下我們來看綜合除法的舞台秀。

設 $f(x)=3x^3+2x^2-x+5$，以 $x-1$ 為除式，底下是一連串的綜合除法：

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & 3 & 2 & -1 & 5 & 1 \\
+ & & 3 & 5 & 4 & \\
\hline
 & 3 & 5 & 4 & 9 & \\
+ & & 3 & 8 & 1 & \\
\hline
 & 3 & 8 & 12 & & \\
+ & & 3 & 1 & & \\
\hline
 & 3 & 11 & & &
\end{array}
$$

上面做了 3 次綜合除法的過程，到底讓我們得了什麼呢？

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3x^3+2x^2-x+5 \\
&= (x-1)(3x^2+5x+4)+9 \\
&= (x-1)\left((x-1)(3x+8)+12\right)+9 \\
&= (x-1)(x-1)(3x+8)+12(x-1)+9 \\
&= (x-1)^2\left(3(x-1)+11\right)+12(x-1)+9 \\
&= 3(x-1)^3+11(x-1)^2+12(x-1)+9
\end{aligned}
$$

利用「除法」，我們將 $f(x)$ 的型態改變了，而作除法的手法是「綜合除法」。當然，你要問，為何要把 $f(x)$ 的型態改變，有啥重要性呢？

[*]bee 美麗之家: http:/www2.chsh.chc.edu.tw/bee

2. 餘式定理

我們先看底下的一組問題：關於 $f(x)=3x^3+2x^2-x+5$，

1. 求 $f(x)$ 除以 x 的餘式。
2. 求 $f(x)$ 除以 x^2 的餘式。
3. 求 $f(x)$ 除以 x^3 的餘式。

這 3 個問題很簡單，分別爲

1. 5。
2. $-x+5$。
3. $2x^2-x+5$。

因爲 $f(x)=3x^3+2x^2-x+5=x(3x^2+2x-1)+5$

$$\begin{aligned} &= x^2\cdot(3x+2)+(-x+5)\\ &= x^3\cdot 3+(2x^2-x+5)， \end{aligned}$$

只要分別把 x, x^2, x^3 提出來，利用除法原理，就可以很輕易地回答上面的三個問題。

現在，我們把問題改成：關於 $f(x)=3x^3+2x^2-x+5$，

1. $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式。
2. $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式。
3. $f(x)$ 除以 $(x-1)^3$ 的餘式。

如果你繼續保留 $f(x)=3x^3+2x^2-x+5$ 的型態，你會發現上面三個問題有點困難。但是，如果你把 $f(x)$ 改寫成 $f(x)=3(x-1)^3+11(x-1)^2+12(x-1)+9$，那很容易就可以得到答案是：

1. 9。
2. $12(x-1)+9$。
3. $11(x-1)^2+12(x-1)+9$。

是嗎 ?(爲什麼？)

因此，當利用綜合除法將多項式 $f(x)$ 改變型態後，我們就可以得到想要的餘式。於是，我們得到：

$\boxed{\text{餘式定理}}$：設 $f(x)=a_n(x-\alpha)^n+\cdots+a_3(x-\alpha)^3+a_2(x-\alpha)^2+a_1(x-\alpha)+a_0$，則

1. 求 $f(x)$ 除以 $x-\alpha$ 的餘式為 a_0 (很特別的：$a_0=f(\alpha)$。)
2. 求 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式為 $a_1(x-\alpha)+a_0$。
3. 求 $f(x)$ 除以 $(x-1)^3$ 的餘式為 $a_2(x-\alpha)^2+a_1(x-\alpha)+a_0$。
4. 以此類推。

原來綜合除法的目的，就是幫我們得到「餘式定理」，或者說：綜合除法幫我們找到「轉換函數型態」的方法。

接下來，我們要問：為什麼要找餘式呢？找餘式很重要嗎？

3. 餘式定理的第一個功能

問題：關於 $f(x)=3x^3+2x^2-x+5=3(x-1)^3+11(x-1)^2+12(x-1)+9$，求

1. $f(0), f(0.1), f(-0.1)$
2. $f(1), f(0.9), f(1.1)$
3. $f(3), f(2.9), f(3.01)$

顯然

1. 利用 $f(x)=3x^3+2x^2-x+5$，
   可得：$f(0)=5, f(0.1)=4.923, f(-0.1)=5.117$
2. 利用 $f(x)=3(x-1)^3+11(x-1)^2+12(x-1)+9$，
   可得：$f(1)=9, f(0.9)=7.907, f(1.1)=10.313$
3. 看來 $f(3), f(2.9), f(3.01)$ 得另外想辦法。

你的辦法是：

又，你可以告訴我餘式定理的第一個功能是甚麼呢？

4. 餘式定理的第二個功能

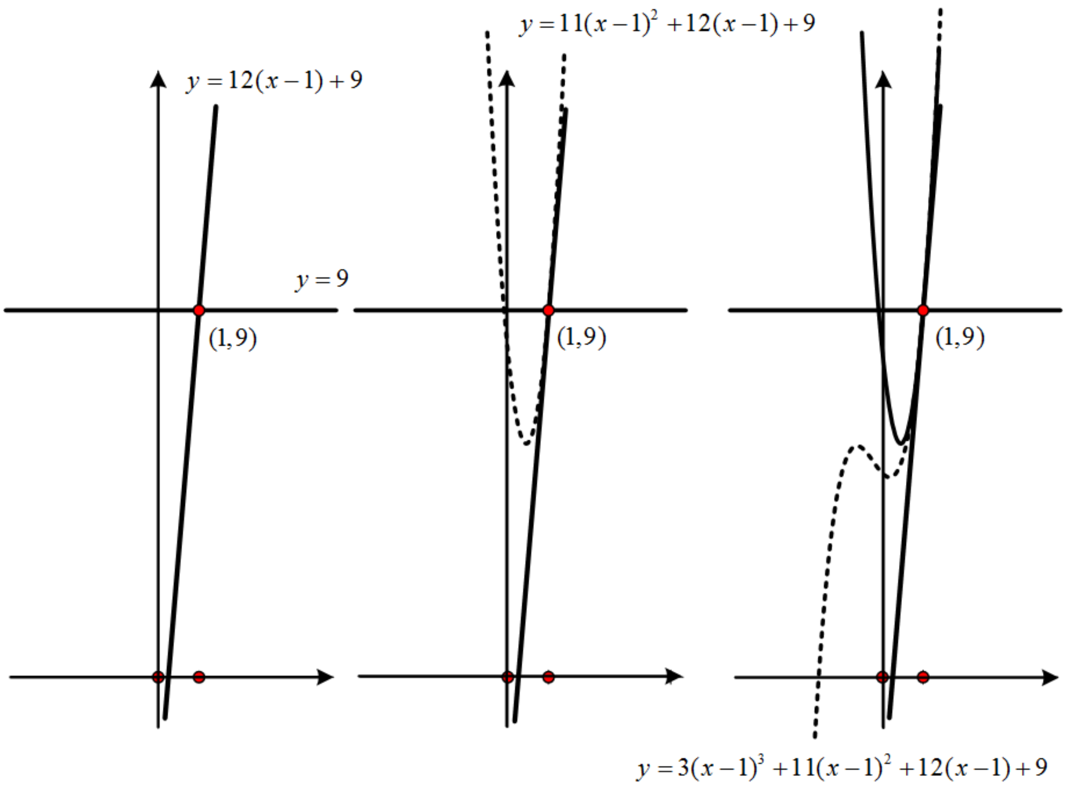
接下來我用電腦幫我們把 4 個函數畫出來：

1. $y=9$。

2. $y=12(x-1)+9$。

3. $y=11(x-1)^2+12(x-1)+9$。

4. $y=3(x-1)^3+11(x-1)^2+12(x-1)+9$



你有啥發現呢？
在點 $(1,9)$ 附近，你看到

1. 直線：$y=12(x-1)+9$。

2. 拋物線：$y=11(x-1)^2+12(x-1)+9$。

3. 三次曲線：$y=3(x-1)^3+11(x-1)^2+12(x-1)+9$

三個圖形幾乎貼在一起。我們把

1. $y=12(x-1)+9$ 稱為 $y=f(x)$ 的「切直線」。

2. $y=11(x-1)^2+12(x-1)+9$ 稱為 $y=f(x)$ 的「切拋物線」。

1. 在很接近點 $(1,9)$ 處，你用切線 $y = 12(x-1)+9$ (也就是 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式) 去「描述」$f(x)$。
2. 而稍微遠離點 $(1,9)$ 一些些，你可以用切拋物線 $y = 11(x-1)^2 + 12(x-1)+9$ (也就是 $f(x)$ 除以 $(x-1)^3$ 的餘式) 來「描述」$f(x)$，依舊有很好的效果。

因此，餘式定理的第二個功能是？

5. 結語

利用除法原理轉換函數的型態，我們可以得到餘式定理，然後，衡量你所需要的條件，選擇你所需要的「較低次多項式」去取代原函數，這樣，我們在求值上將有較大的便利性。

當然，轉換的工具是「綜合除法」，而當你學得更多時，你會學到更棒的工具「微分」。