第一次平時考　　班級：114　　姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 座號：＿＿＿＿＿

** 每一個問題盡可能的寫下你的理由與計算過程，我將依據你的理由與過程給分。

** $\boxed{\text{字要寫小、寫整齊}}$，作答由最左邊開始，每個空白處要變成兩欄。

每一題 11 分，總分 110 分。通關密語：讀書易、思索難，但缺一不可。

1. 敍述「餘式定理」:
   設 $f(x)$ 的 $(x-\alpha)$ 泰勒展開式爲
   $f(x)=a_n(x-\alpha)^n+\cdots+a_3(x-\alpha)^3+a_2(x-\alpha)^2+a_1(x-\alpha)+a_0$，則

   (1) $f(x)$ 除以 $x-\alpha$ 的餘式爲 a_0 (很特別的：$a_0=f(\alpha)$。)

   (2) $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式爲 $a_1(x-\alpha)+a_0$。

   (3) $f(x)$ 除以 $(x-1)^3$ 的餘式爲 $a_2(x-\alpha)^2+a_1(x-\alpha)+a_0$。

   (4) 以此類推。

   其中 $y=a_1(x-\alpha)+a_0$ 爲 $f(x)$ 在 $x=\alpha$ 的切線方程式，
   $y=a_2(x-\alpha)^2+a_1(x-\alpha)+a_0$ 爲 $f(x)$ 在 $x=\alpha$ 的切拋物線方程式。

2. 敍述「因式原理」:
   設 $f(x)$ 是一個多項式，且 $\deg f(x)=n$。
   若 $f(\alpha)=0$，則 $f(x)=(x-\alpha)q(x)$，其中 $\deg q(x)=n-1$。
   $f(\alpha)$ 像一個探針，當函數值 $f(\alpha)$ 爲 0 時，$f(x)$ 就可以被分解，分解後商式 $q(x)$ 的次數比 $f(x)$ 的次數低，因此分解有「降次」的功能，當然，我們的目標是：利用因式分解，得到 $f(x)$ 的完全分解式。

3. 設 $f(x)=2x^2-3x+1, g(x)=4x^3+x^2-2$，

   (1) 求 $f(x)\cdot g(x)=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

   (2) 求 $g(x)$ 除以 $f(x)$ 的商式＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 與餘式＿＿＿＿＿＿＿＿

   (1) $8x^5-10x^4+x^3-3x^2+6x-2$

   (2) 商式：$2x+\dfrac{7}{2}$, 餘式：$\dfrac{17}{2}x-\dfrac{11}{2}$

4. 設 $f(x)=6x^5+52x^4-17x^3+15x^2+58x+18$，試用綜合除法
求 $f(-9)=$______________。
$f(-9)=-18$

5. (1) 試使用綜合除法將 $f(x)=x^4-5x^3+5x-7$ 換成 $(x-3)$ 的泰勒式

____

(2) 求 x^4-5x^3+5x-7 除以 $(x-3)^3$ 的餘式 ________________________。

(3) 求 $f(2.9)=$ ______________________。

(1) $f(x)=(x-3)^4+7(x-3)^3+9(x-3)^2-22(x-3)-46$

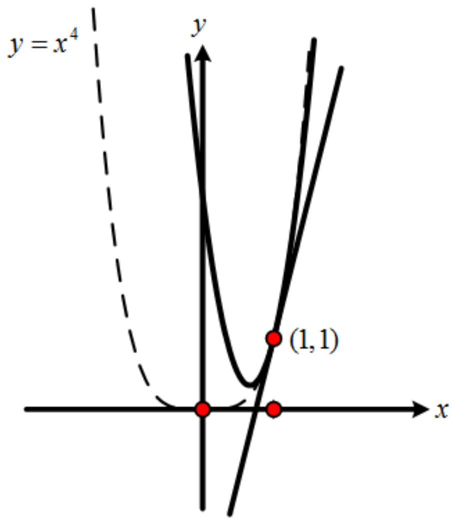
(2) $9(x-3)^2-22(x-3)-46$

(3) -43.7169

6. 求 $f(x)=x^4$ 在 $(1,1)$ 的 (右圖是 $f(x)=x^4$ 的參考圖)

(1) 切直線方程式 __________________________

(2) 切拋物線方程式 ________________________________



$f(x)=x^4$ 的 $(x-1)$ 泰勒式爲 $(x-1)^4+4(x-1)^3+6(x-1)^2+4(x-1)+1$，

(1) 切直線方程式爲 $y=4(x-1)+1$，

(2) 切拋物線方程式爲 $y=6(x-1)^2+4(x-1)+1$。

7. 設 $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$。求通過 $(1,f(1)),(2,f(2))$ 與 $y=f(x)$ 相割的直線方程式 ________________。

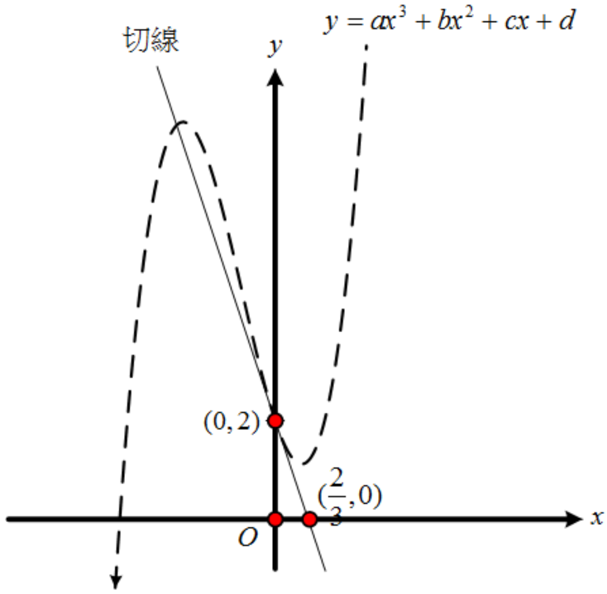
因爲 $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式爲 $26x-21$，即 $f(x)=(x-1)(x-2)(x^2+4x+11)+(26x-21)$，故通過 $(1,f(1)),(2,f(2))$ 的割線方程式爲 $y=26x-21$。

當然，你也可以求出 $f(1)=5, f(2)=31$，然後求通過兩點 $(1,5),(2,31)$ 的直線方程式爲 $y=26x-21$。

8. 右圖是 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的圖形

(1) 求數對 $(c,d)=$ ________________________。

(2) 判斷 a,b 的正負值________________________________。



(1) 由圖可知：切線方程式爲 $y=(-3)(x-0)+2=-3x+2$，因爲 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 是 $f(x)$ 的 x 泰勒式，所以 $y=cx+d$ 就是切線，即 $cx+d=-3x+2$，可得 $(c,d)=(-3,2)$

(2) 注意看在 $(0,2)$ 附近，$y=f(x)$ 的圖形在切線的上方，可見得 $b>0$。又 $y=f(x)$ 的圖形越往右走，其函數值越大，可見得 $a>0$。

9. 分解多項式 $2x^3-3x^2-8x-3=$ ____________________________________。

測試 $f(-1)=0$，因此

$2x^3-3x^2-8x-3=(x+1)(2x^2-5x-3)=(x-1)(2x+1)(x-3)$。

10. 已知三次多項式 $f(x)$ 滿足 $f(0)=f(1)=f(2)=0, f(3)=3$，

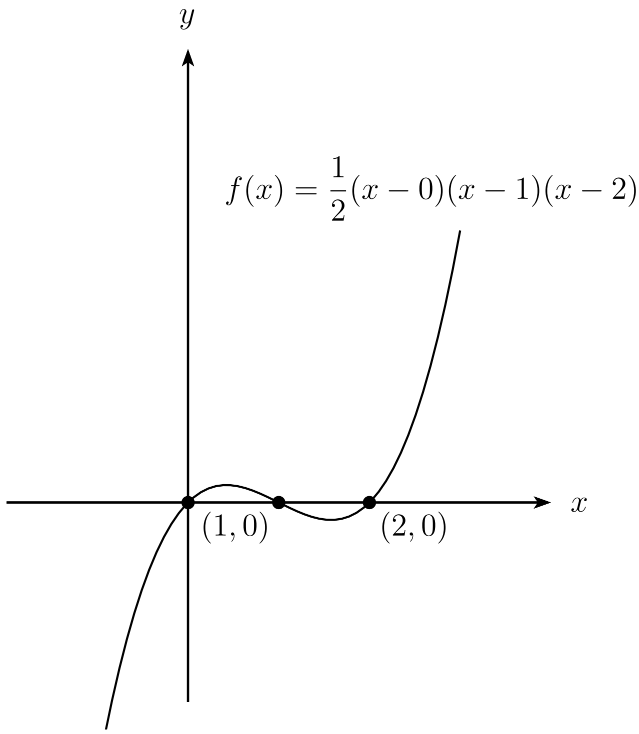
(1) 求 $f(x)=$____。

(2) 求 $f(4)=$__________________________。

(3) 畫出 $y=f(x)$ 的草圖。

(1) 由因式定理可設 $f(x)=a(x-0)(x-1)(x-2)$，又由 $f(3)=3$，可解得 $a=\frac{1}{2}$，即 $f(x)=\frac{1}{2}(x-0)(x-1)(x-2)$

(2) $f(4)=12$。



11. 求一個二次函數 $y=f(x)$ 滿足 $f(1)=1, F(2)=4, f(3)=5$

____。

牛頓法三步驟：

(1) $f_0(x)=1$；

(2) $f_1(x)=1+a(x-1)$，由 $f_1(2)=1+a=4$，解得 $a=3$，即 $f_1(x)=1+3(x-1)$；

(3) $f_2(x)=1+3(x-1)+b(x-1)(x-2)$，由 $f_2(3)=1+6+2b=5$，解得 $b=-1$，故 $f_2(x)=1+3(x-1)-2(x-1)(x-2)$。