尤拉的魔術

～ e ～

bee*

104.10.16 ～ 104.10.18

Magic

1. 尤拉的奇想

首先我們先介紹棣美佛 (Abraham de Moivre，1667 年－ 1754 年) 定理：

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{1}$$

這是一個化乘爲加的計算公式，因此，不禁讓我們想到能化乘爲加的「 指數 」。

$$a^x \times a^y = a^{x+y} \tag{2}$$

於是，我們把 $\cos\theta + i\sin\theta$ 看成一個指數型態 $e^{i\theta}$：

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \tag{3}$$

e^i 是一個單位，而 θ 是變動的。

利用指數型態，我們可以將棣美佛定理改寫成

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = e^{in\theta} \tag{4}$$

然後把 $n\theta$ 看成 y，即 $\theta = \dfrac{y}{n}$，並將式子 (4) 改寫成

*bee 美麗之家: http:/www2.chsh.chc.edu.tw/bee

$$(\cos\frac{y}{n}+i\sin\frac{y}{n})^n=e^{iy} \tag{5}$$

因爲式子的右邊的指數部分 iy 中還有 i，於是，我們將變數 y 用 $-ix$ 取代，可得

$$(\cos\frac{-ix}{n}+i\sin\frac{-ix}{n})^n=e^{x} \tag{6}$$

因爲 (6) 式對於任意整數都是正確的，因此，我們讓 $n\to\infty$，則 $\cos\frac{-ix}{n}$ 可用 1 取代，$\sin\frac{-ix}{n}$ 用 $\frac{-ix}{n}$ 取代，得到

$$\lim_{n\to\infty}(1+i\cdot\frac{-ix}{n})^n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n=e^x \tag{7}$$

最後取 $x=1$，就得到

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \tag{8}$$

利用小算盤，讓 $n=100000$ 代入可得 e 的近似值爲

$$e=2.7182682371744896680350648244226 \tag{9}$$

而利用 google 得到的近似值爲 2.71828182846，可見這一個方法要逼近 e 的值，有點辛苦。

2. 後話

這是我聽林琦焜老師的開放課程得知的，眞是有趣的想法。其實，數學雖然需要嚴密的思考過程，但是胡思亂想，更是數學的靈魂。