

# 1 + cos θ + i sin θ 之無言的證明

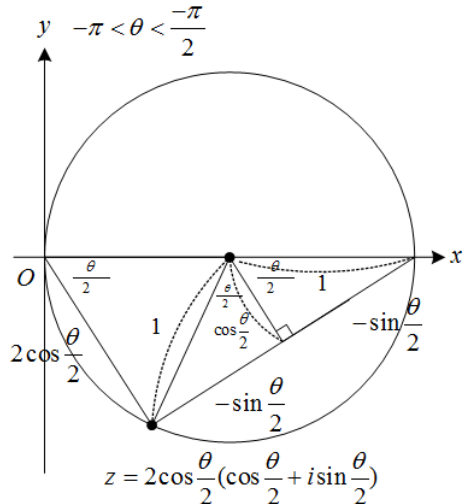
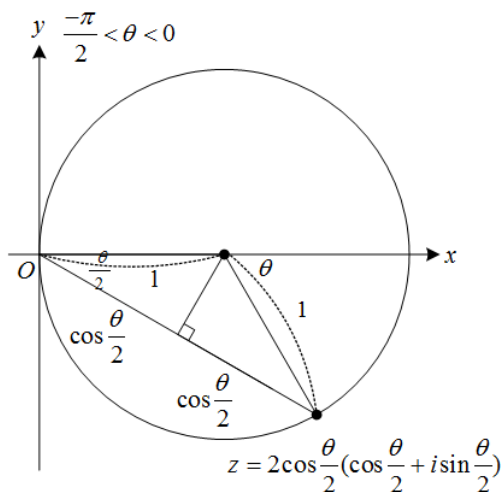
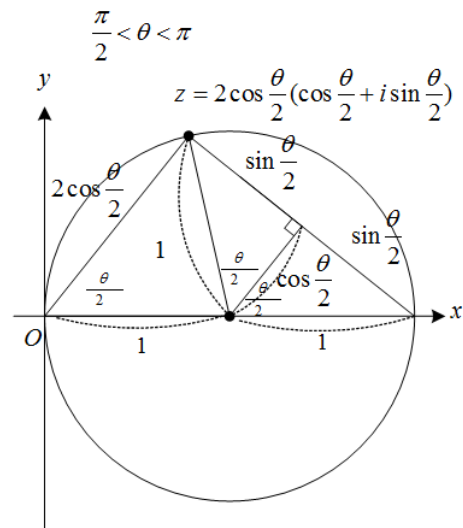
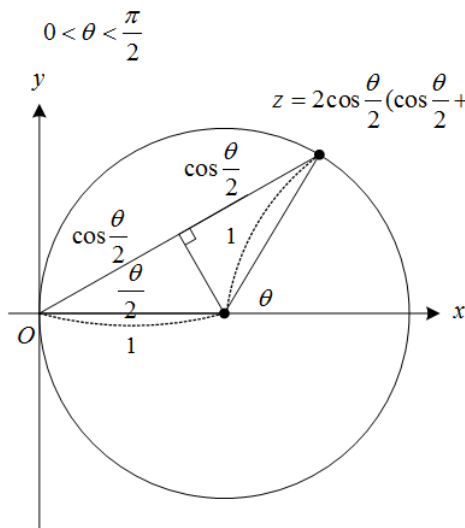
bee\*

104.10.19 ~ 104.10.19

數學的唯一特徵 —— 美妙。

## 1. 圖解真美

$$z = 1 + \cos \theta + i \sin \theta = 2 \cos \frac{\theta}{2} (\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2})$$



\*bee 美麗之家: <http://www2.chsh.chc.edu.tw/bee>

## 2. 代數解法

分別求  $1 + \cos \theta + i \sin \theta$  的長與幅角。

(1)  $1 + \cos \theta + i \sin \theta$  的長為

$$\begin{aligned}\sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} &= \sqrt{2 + 2 \cos \theta} \\ &= \sqrt{2 + 2 \left( 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right)} \\ &= \sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = |2 \cos \frac{\theta}{2}|\end{aligned}$$

(2)  $1 + \cos \theta + i \sin \theta$  的幅角為

(a)  $2 \cos \frac{\theta}{2} \geq 0$  : (當  $0 \leq \theta < \pi$ )

$$\begin{aligned}1 + \cos \theta + i \sin \theta &= 1 + \left( 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right) + i \cdot \left( 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) \\ &= 2 \cos \frac{\theta}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)\end{aligned}$$

(b)  $2 \cos \frac{\theta}{2} \leq 0$  : (當  $\pi \leq \theta < 2\pi$ )

$$\begin{aligned}1 + \cos \theta + i \sin \theta &= 1 + \left( 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right) + i \cdot \left( 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) \\ &= -2 \cos \frac{\theta}{2} \left( -\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right)\end{aligned}$$

如果我們一開始把主幅角規定在  $-\pi \leq \theta < \pi$ ，那麼我們就可以保證  $2 \cos \frac{\theta}{2} \geq 0$ ，如此， $1 + \cos \theta + i \sin \theta$  就會有非常漂亮的結果：

$$1 + \cos \theta + i \sin \theta = 2 \cos \frac{\theta}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

## 3. 結語

規定可以依需要而有所改變。

無言的圖解，真是美麗！