一元二次方程式

bee*

104.10.21 ∼ 104.10.21

學 — 乃欲知其所以然也！

1. 前言

這是一個我們在國中時候就已經非常熟悉的問題了，到了高中來，我們可以得到更多的體會嗎？挑戰你的數學「味蕾」，而不是只想拿到一些分數而已。

2. 一元二次方程式的幾何意義

什麼是「一元二次方程式」呢？

型如 $ax^2+bx+c=0$ 就是一元二次方程式。細看一下：$y=f(x)=ax^2+bx+c$ 是一個二次函數，方程式是問 $f(x)=0$ 發生時，x 的值爲何？

$f(x)=0$ 就是 y 坐標爲 0，因爲 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形是一條拋物線，所以一元二次方程式的問題，就是找拋物線在何處的 y 坐標爲 0，也就是

找拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 和 x 軸的交點。

3. 一元二次方程式的公式解

利用配方法，我們可以得到「一元二次方程式的公式解」，先看一個例子，作法如下：

$$x^2-3x+1=0 \Rightarrow x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=-1+\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow (x-\frac{3}{2})^2=\frac{5}{4} \Rightarrow x-\frac{3}{2}=\frac{\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

*bee 美麗之家: http:/www2.chsh.chc.edu.tw/bee

一般情形：

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow a\left(x^2-2\cdot\frac{-b}{2a}x+\left(\frac{-b}{2a}\right)^2\right)=-c+a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2$$

$$\Rightarrow a(x-\frac{-b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$\Rightarrow (x-\frac{-b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow x-\frac{-b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 就是方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解。

不要只是記得公式解，應該要能隨時利用配方法推導出此公式來。

4. 公式解的分析

因爲 $\sqrt{\ }$ 內的數值不能爲負數，因此，國中時候，我們有以下的結論：

若規定 $D=b^2-4ac$，則方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的「代數結論」爲：

1. 當 $D>0$ 時，方程式有兩相異實根 $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。
2. 當 $D=0$ 時，方程式有兩相等實根 $x=\dfrac{-b}{2a}$。
3. 當 $D<0$ 時，方程式沒有實根。

把上面的結論變成討論抛物線 $f(x)=ax^2+bx+c$ 與 x 軸的交點，則方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的「幾何結論」爲：

1. 當 $D>0$ 時，抛物線和 x 軸有兩個交點 $(\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a},0),(\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a},0)$。
2. 當 $D=0$ 時，抛物線和 x 軸恰有一個交點 $(\dfrac{-b}{2a},0)$，俗稱相切。
3. 當 $D<0$ 時，抛物線和 x 軸沒有交點，且
   (a) 當 $a>0$ 時，整個抛物線在 x 軸的上方。
   (b) 當 $a<0$ 時，整個抛物線在 x 軸的下方。

5. 數學家的奇想與不滿意

可不可以讓所有的一元二次方程式都恰有兩個解？

老實說，這眞是胡鬧。看到了上面的分析，其實已經是相當完整了，數學家的這種想法，只是胡鬧而已。

但是就是有數學家喜歡胡鬧，於是，規定符號 $\sqrt{-1}$ 是可行的，代數運算上就是有滿足 $(\sqrt{-1})^2 = -1$ 的一個數，稱爲「虛數單位」，數學家尤拉還用符號 i 表示 $\sqrt{-1}$，於是，所有的一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 都恰有兩個解 $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$，即使在 $b^2 - 4ac < 0$ 的時候。

6. 爆炸性的發展

精彩的故事才要開始，虛數 i 的產生，讓數學有了完全不一樣的生命，欲知分曉，請上課時認眞聽講。

7. 研讀後問題

1. 何爲「一元二次方程式」?
2. 何爲「方程式」?
3. 試利用配方法求一元二次方程式的 $ax^2 + bx + c = 0$ 的公式解。
4. 一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的代數結論爲何？
5. 一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的幾何結論爲何？
6. 整個拋物線圖形在 x 軸的上方的條件爲何？
7. 引進符號 $\sqrt{-1}$ 的目的爲何？
8. 說說看，你認識的 i。