

複數

bee*

104.10.22 ~ 104.10.22

因為莫名的不滿意，所以才有進步的契機！

1. 前言

虛數！空空的數，整人的，還是...。
因為奇想，才開了一扇門，而門外驚奇不斷。

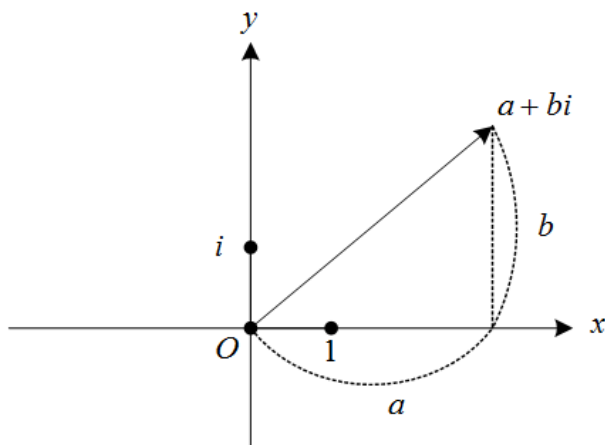
2. 顧名思義的複數

複數，雙數也！你認識有雙數的東西嗎？當然有，那就是坐標 (複數的幾何意義)。

複數就是坐標。

看看坐標 (a, b) ， $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$ ，如果把 $(1, 0)$ 用 1 表示， $(0, 1)$ 用 i 表示，那麼， (a, b) 就可以表示成 $a + bi$ ，我們稱 $a + bi$ 為複數 (複數的代數型態)。

從現在開始，你就把 $a + bi$ 看成 (a, b) ， $a + bi = a \cdot 1 + b \cdot i$ ， 1 就是 x 軸 (實數軸) 上的單位， i 就是 y 軸 (虛數軸或側數軸) 上的單位。如下圖所示：



*bee 美麗之家: <http://www2.chsh.chc.edu.tw/bee>

3. 複數的計算

底下，我們介紹一大堆計算上的規定：

1. $i^2 = \sqrt{-1}^2 = -1$ 。

2. $(a+bi) + (c+di) = (a+b) + (c+d)i$, $(a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$ 。
例如： $(2+i) + (3+2i) = 5+3i$, $(2+i) - (3+2i) = -1-1i$ 。

3. $(a+bi) \times (c+di) = (a+bi) \times c + (a+bi) \times (di)$ 。
例如： $(2+i) \times (3+2i) = (2+i) \times 3 + (2+i) \times 2i$
(可整理得) $= 6 + 3i + 4i - 2 = 4 + 7i$ 。

4. $a+bi$ 中的 x 坐標 a 稱為實部 (x 軸上的數)， y 坐標 b 稱為虛部 (y 軸上的數)。
 $a+bi$ 中的 a, b 都是實數。例如： $3-2i$ 的實部是 3，虛部是 -2 。

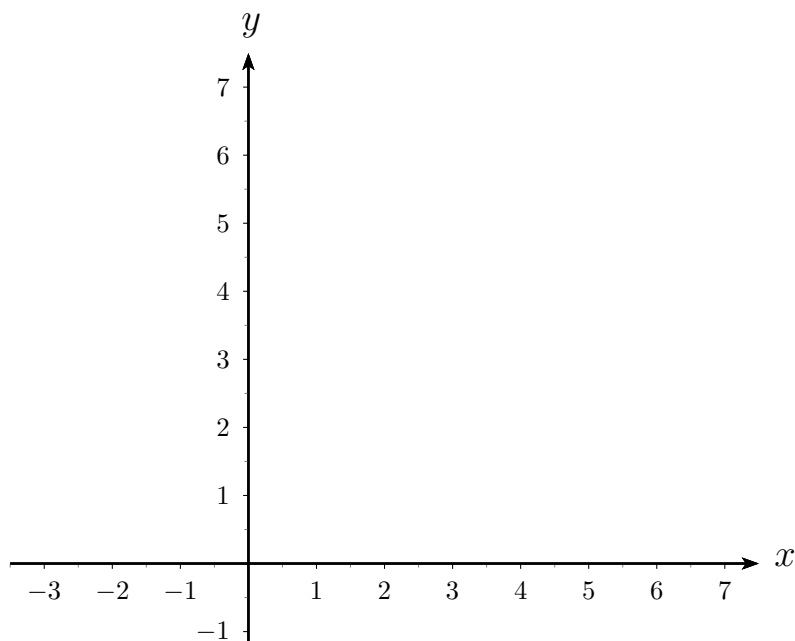
5. $\sqrt{-2} = \sqrt{2}i$ ，但 $\sqrt{2}$ 不可以寫成 $\sqrt{-2}i$ ，因為 $\sqrt{2}$ 是 x 軸上的數，不在 y 軸上。

上面規定了「加、減、乘」三種運算，利用規定我們可以做除法：

1. 很特別： $(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 > 0$ ，我們規定 $a-bi$ 稱為 $a+bi$ 的「共軛複數」。即 $z = a+bi$, $\bar{z} = \overline{a+bi} = a-bi$ 。我們把 \bar{z} 稱為「 z 爸」。

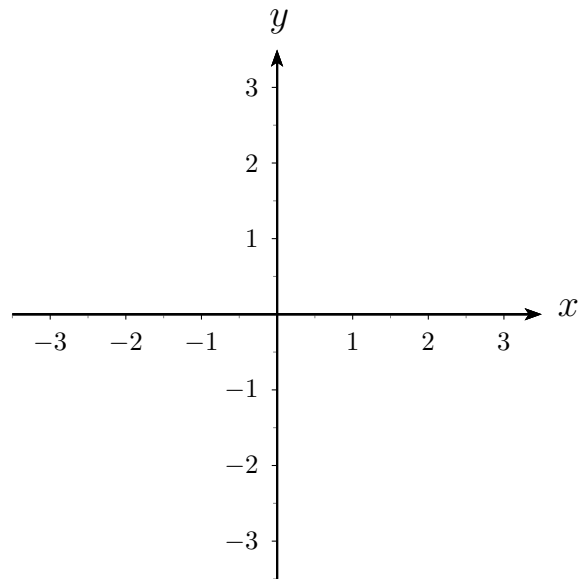
2. $\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$ 。

試試看：在坐標平面上畫出點 $2+i$, $3+i$, $(2+i) \times (3+2i)$, $\frac{2+i}{3+2i}$ 。



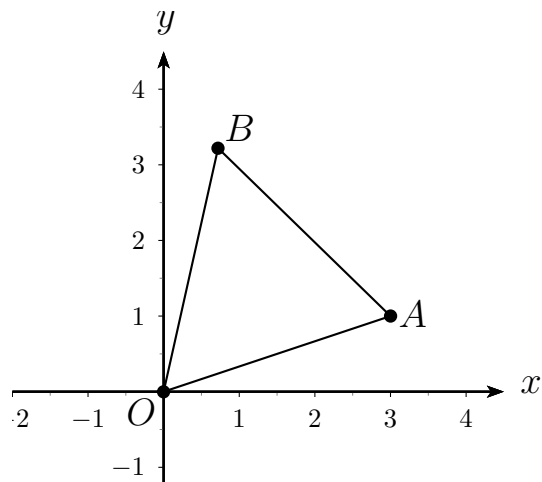
4. 一個妙觀察

設 $z_1 = 2 + i$, $z_2 = (2 + i) \times i$, $z_3 = (2 + i) \times i^2$, $z_4 = (2 + i) \times i^3$, $z_5 = (2 + i) \times i^4$ 。
請算出各數，並畫在底下的坐標平面上。



5. 簡單又困難的問題

問題：已知 $\triangle OAB$ 是正三角形， O 是原點， A 是點 $3 + i$ ， $B = a + bi$, $b > 0$ ，
求 B 點的複數坐標。



6. 一元二次方程式的公式解

解下列各方程式：

1. $2x^2 - 4x + 5 = 0$ 。

2. $x^2 + x + 1 = 0$ 。

3. $x + \frac{1}{x} = 1$ 。

7. 研讀後問題

1. 說明複數的代數型態與幾何意義。

2. 寫出 $3 - 2i$ 的實部與虛部。

3. 計算 (1) $(2 - i) + (3i - 1)$, (2) $(2 - i) \times (-1 + 2i)$ (3) $\frac{2 - i}{-1 + 2i}$ 。

4. 在坐標平面上畫出 $2 - i$, $3i - 1$, $(2 - i) + (3i - 1)$, $(2 - i) \times (-1 + 2i)$ 。

5. 已知 $OABC$ 是正方形， O 是原點， $A = 1 + 2i$ ， C 在第二象限，求 B 點坐標。

6. 解方程式 $2x^2 + 3x + 4 = 0$ 。

7. 已知 $(3 + 4i) \times (6 + bi) > 0$ ，求實數 b 的值。

8. 引進符號 $\sqrt{-1}$ 的代數目的為何？

9. 引進符號 $\sqrt{-1}$ 的幾何目的為何？