

# 近似分解 - 勘根定理

bee\*

104.10.25 ~ 104.10.25

利用描點畫圖，可以找出方程式的實根範圍。

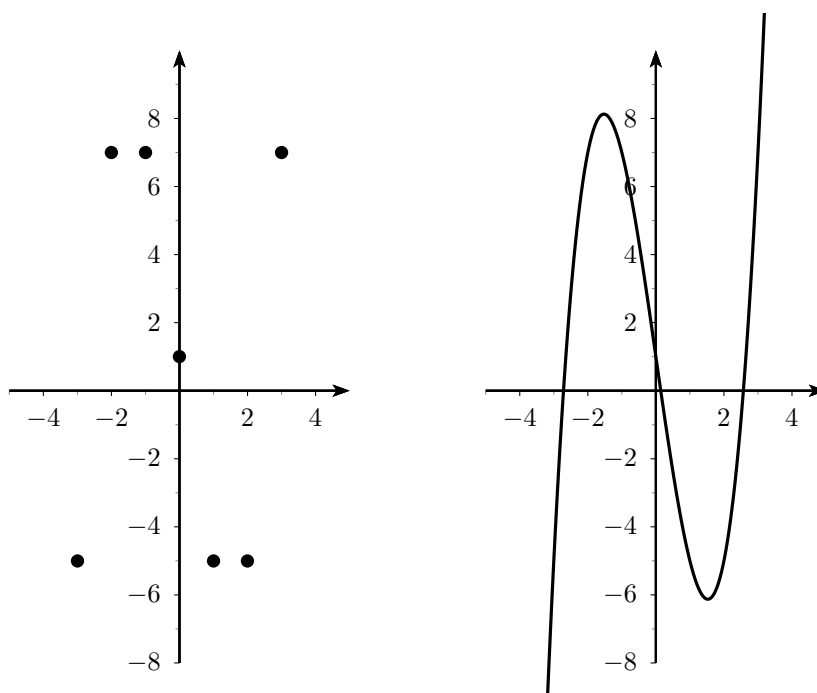
## 1. 畫出草圖來

例題 1. 畫出  $f(x) = x^3 - 7x + 1$  的草圖。

有啥好辦法嗎？答案是 —— 描點。

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-5	7	7	1	-5	-5	7

(為何是描 7 點呢？) 然後畫出草圖：



\*bee 美麗之家: <http://www2.chsh.chc.edu.tw/bee>

老實說要畫得很準很困難，不過大約是這樣。右圖是電腦畫的，當然很準，你畫的草圖大約只能看出來：在  $x$  軸上，

●  $-3 \sim -2$

●  $0 \sim 1$

●  $2 \sim 3$

之間， $y = f(x)$  的圖形和  $x$  軸有交點，換句話說，在這三個範圍內，方程式  $x^3 - 7x + 1 = 0$  有根，即三根為  $-2. \dots$ ,  $0. \dots$ ,  $2. \dots$  (此三次方程式恰有三個實根)。

根據上面的觀察，我們有以下的結論：

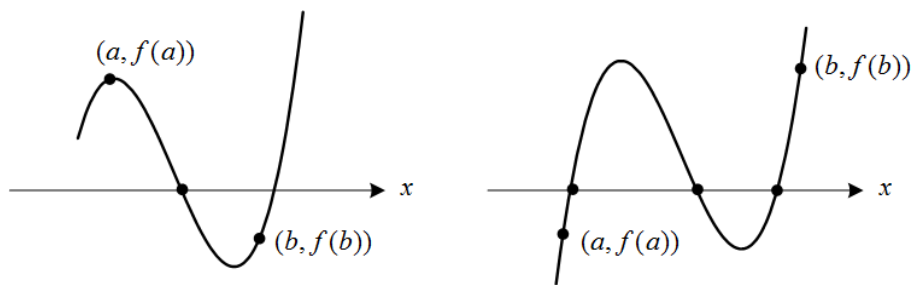
**勘根定理** (找實係數方程式之近似實根的方法)：

設  $f(x)$  是一個實係數多項式， $a < b$ 。

若  $f(a), f(b)$  兩數異號，則「至少可以找到一個  $c$ 」，滿足

(1)  $a < c < b$ ；(2)  $f(c) = 0$ 。

如下圖所示：



思考三個問題：

1. 聽說不等式  $f(a) \times f(b) < 0$  可以表示  $f(a), f(b)$  兩數異號，你同意嗎？為什麼？
2. 為何是「至少」可以找到一個  $c$ ，而不是「恰好一個」呢？
3. 若  $f(a), f(b)$  同號，那是不是在  $a, b$  之間就是沒有  $c$  可以滿足  $f(c) = 0$  了呢？

## 2. 縮小範圍

關於方程式  $x^3 - 7x + 1 = 0$ ，我們知道它三根的範圍，那麼可以縮小範圍嗎？甚且，我可以要求你：估計此三根的近似值，「正確到」小數點以下第一位嗎？

我幫你作  $0 \sim 1$  之間這一個範圍，至於另兩個範圍，留作習題。

因為  $f(0) = 1, f(1) = -5$ ，所以我猜測在  $0, 1$  之間的根，應該是  $0.2 \dots$  (why)。

於是我計算  $f(0.2) = -0.392$ 。問你一下，那這根應該差不多是？

因爲  $f(0) \cdot f(0.2) < 0$ ，所以這一個根看起來應該是  $0.1\dots$ ，不過，爲了保險起見，我再計算  $f(0.1) = 0.301$ ，呀！這根真的界在  $0.1 \sim 0.2$  之間。

$x$	0	0.1	0.2	1
$f(x)$	1	0.301	-0.392	-2

因爲我們是要「正確到小數點以下第一位」，因此，此根顯然是  $0.1\dots$ ，你給我的答案就是  $0.1$ 。

但是，如果我問的是：「四捨五入取值到小數點以下第一位」，那該怎樣呢？那我們就得知小數點以下的第二位大約是多少？恩！怎辦？

### 二分逼近法。

繼續計算函數值：

$x$	0.1	0.15	0.2	1
$f(x)$	0.301	-0.046625	-0.392	-2

因爲  $f(0.15) < 0$ ，所以可以知道這根是  $< 0.15$  的，因此，四捨五入的近似值爲  $0.1$ 。

因爲考試的要求大約到這裡，所以前面是基本的討論。可以就此打住了。

### 3. 研讀後問題

1. 求方程式  $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$  在哪些連續整數之間有實根。
2. 求方程式  $x^3 - 7x + 1 = 0$  另兩根的近似值「正確到」小數點以下第一位。
3. 敘述「勘根定理」。
4. 說明勘根定理是正確的理由。