

# 變形的餘式定理

bee\*

104.10.25 ~ 104.10.25

因為要快速計算函數值，所以我們需要餘式定理，  
有時候，還必須變形！

## 1. 想一個問題

問題：設  $x = \sqrt{2} + 1$ ，求  $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 2x + 2$  的值。

我們有四招可以處理這樣的問題：

- 直接計算。
- 綜合除法與原始的餘式定理。
- 泰勒式。
- 變形的餘式定理

直接計算法交給你，我來說說另三個方法。

## 2. 綜合除法與原始的餘式定理

我們知道當多項式  $f(x)$  除以  $x - a$  時，可以將  $f(x)$  變形成  $(x - a)q(x) + f(a)$ ，  
即

$$f(x) = (x - a)q(x) + f(a)$$

因此當我們用  $x - a$  除  $f(x)$  時，所得到的餘式就是函數值  $f(a)$ 。

那，如何求得  $f(\sqrt{2} + 1)$  呢？答案是：綜合除法。

底下是我們的計算過程：

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -3 & -2 & 2 & \sqrt{2} + 1 \\ & 2\sqrt{2} + 2 & \sqrt{2} + 3 & \sqrt{2} + 2 & \sqrt{2} + 2 & \\ \hline 2 & 2\sqrt{2} - 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} + 4 & \end{array}$$

可得餘式  $f(\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2} + 4$ 。看來，這一個解法不錯喔！

\*bee 美麗之家: <http://www2.chsh.chc.edu.tw/bee>

### 3. 泰勒式

利用綜合除法，我們也可以將  $f(x)$  改成  $(x - 1)$  的泰勒式，即

$$f(x) = 2(x - 1)^4 + 5(x - 1)^3 - 9(x - 1) - 4,$$

於是，計算  $f(\sqrt{2} + 1) = 2 \cdot (\sqrt{2})^4 + 5 \cdot (\sqrt{2})^3 - 9 \cdot \sqrt{2} - 4 = \sqrt{2} + 4$ 。

找  $x - 1$  的泰勒式也是不錯的方法。

### 4. 變形的綜合除法

啥是變形的綜合除法呢？我寫在下面，你看看可否理解喔！

設  $x = \sqrt{2} + 1$ 。

$$\begin{aligned} \text{則 } x - 1 &= \underline{\quad} \sqrt{2} \Rightarrow (x - 1)^2 = (\underline{\quad} \sqrt{2})^2 \\ &\Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \end{aligned}$$

將  $f(x)$  除以  $x^2 - 2x - 1$ ，把  $f(x)$  改成

$$f(x) = (x^2 - 2x - 1)(2x^2 + x + 1) + (x + 3),$$

於是， $f(\sqrt{2} + 1) = 0 + (\sqrt{2} + 1) + 3 = \sqrt{2} + 4$ 。

這實在是一個很有趣的解法，但是，為何是正確的呢？

如果你把上面  $\underline{\quad}$  裡加上  $\pm$ ，你會發現整個推論依然是正確的，這說明方程式  $x^2 - 2x - 1 = 0$  的兩根為  $\pm\sqrt{2} + 1$ ，也就是說二次式  $x^2 - 2x - 1 = (x - (\sqrt{2} + 1))(x - (\sqrt{2} - 1))$ ，即

$$f(x) = (x - (\sqrt{2} + 1))(x - (\sqrt{2} - 1))(2x^2 + x + 1) + (x + 3),$$

這樣你看出來為何可以這樣做了嗎？

我把這一個方法稱為變形的餘式定理。求函數值，只要找到「適當的除式」，做適當的除法，

餘式可以代替原函數來求函數值。

### 5. 結語

回想一下！除法的功能是把函數變形： $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ ，而變形後的餘式可以取代原函數，透過「除法降次」，可以把求函數值的問題變簡單喔！