拉格朗日插值法

bee*

104.10.25 $\sim$ 104.10.27

數學工程師堆積木，真美妙！

1. 找函數的方法

問題：設 $f(x)$ 是一個二次函數，且 $f(1)=2, f(2)=3, f(3)=-1$，試寫出此函數 $f(x)$。

我們已經學過牛頓法找函數，複習一下：

1. $f_0(x)=2$。
2. $f_1(x)=2+(x-1)$。
3. $f_2(x)=2+(x-1)-\dfrac{5}{2}(x-1)(x-2)$

利用由常數函數開始，逐次向上建立函數的方法，我們可以找到二次函數 $f(x)$，這就是牛頓法精妙的地方，同時，我們由牛頓法也可以知道：要滿足三個函數值的函數，正常來說，「最低次的函數是二次」。

現在把函數值變化一下，但是依舊在 $x=1,2,3$ 三處，

$$\text{例如：} f(1)=3, f(2)=-2, f(3)=4\text{，}$$

那滿足此三條件的「二次函數」爲何呢？

當然，你只要再次使用牛頓法，就可以達成任務。只是我們不禁想問：既然 $x=1,2,3$ 沒有改變，

有沒有可能只做一次，

就可以做完所有可能的問題呢？(???，你會不會覺得我怪怪的！)

---

*bee 美麗之家: http:/www2.chsh.chc.edu.tw/bee

2. 積木法：拉格朗日插值法

有一個妙招，你試著看看囉！底下是三個「函數積木」:

1. $f_1(x) = \underline{\hspace{2cm}}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}$。　　2. $f_2(x) = \underline{\hspace{2cm}}\dfrac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}$。

3. $f_3(x) = \underline{\hspace{2cm}}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$。

觀察這三個積木函數，

1. $f_1(x)$ 滿足 $f_1(2) = f_1(3) = 0$，那 $f_1(1) = \underline{\hspace{2cm}}$？
2. $f_2(x)$ 滿足 $f_2(1) = f_2(3) = 0$，那 $f_2(2) = \underline{\hspace{2cm}}$？
3. $f_3(x)$ 滿足 $f_3(1) = f_3(2) = 0$，那 $f_3(3) = \underline{\hspace{2cm}}$？

由上面的觀察可知：$f_1(x)$ 是專屬 $x = 1$ 的積木函數，同理 $f_2(x)$ 是專屬 $x = 2$ 的積木函數，$f_3(x)$ 是專屬 $x = 3$ 的積木函數，於是，如果你希望

$f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = -1$，那麼把積木堆起來：

$$f(x) = \underline{\ 2\ }\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + \underline{\ 3\ }\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + \underline{\ -1\ }\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}\text{，}$$

如果你希望

$f(1) = 201, f(2) = 301, f(3) = 401$，那麼把積木堆起來：

$$f(x) = \underline{\ 201\ }\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + \underline{\ 301\ }\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + \underline{\ 401\ }\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}\text{。}$$

3. 結語

很難想像喔！數學家就像積木工程師一樣，把積木設計好，你想要怎樣的函數，把積木堆疊起來就好，眞美妙！

4. 研讀後問題

1. 使用積木函數寫出滿足 $f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2, f(4) = 3$ 的三次函數。
2. 試問：$f(x) = \underline{\ 201\ }\dfrac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + \underline{\ 301\ }\dfrac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + \underline{\ 401\ }\dfrac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}$ 是幾次多項式？