有理根檢查法

bee*

104.10.28 ∼ 104.10.28

就是嘗試錯誤法，不過方法很簡單，輕易可學。

1. 想一些問題

問題 1 : 求 $2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$ 的整係數一次因式。
問題 2 : 求 $2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 = 0$ 的有理根。

你覺得這問題 1 與 2 有何關係呢？

問題 3 : 何爲整係數一次因式？可以找一個例子嗎？
問題 4 : 何爲整係數多項式？可以找一個例子嗎？
問題 5 : 何爲有理根，可以找一個例子嗎？

底下我以問題 1,2 的例子幫各位解答。

2. 問題解說

首先，告訴各位一個分解式 : $2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 = (x+1)(2x^2 - 5x - 3)$，其中 $2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$ 的係數都是整數，所以 $2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$ 是一個「三次整係數多項式」，同理 $2x^2 - 5x - 3$ 是一個「二次整係數多項式」，當然，$x + 1$ 就是一個「整係數一次式」。

因爲 $(x + 1)$ 整除 $2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$，所以 $x + 1$ 是 $2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$ 的因式，當然，$x + 1$ 就是 $2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$ 的一次整係數因式。同時，若設 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$，則 $f(-1) = 0$，可知 -1 是 $f(x) = 0$ 的一個根。

但是你看到 $2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 = (x+1)(2x^2 - 5x - 3)$，會想到 $(2x^2 - 5x - 3)$ 還可以分解成 $(2x + 1)(x - 3)$，所以 $2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$ 的完整分解式爲

*bee 美麗之家: http:/www2.chsh.chc.edu.tw/bee

$$2x^3-3x^2-8x-3=(x+1)(x-3)(2x+1)$$

因此 $2x^3-3x^2-8x-3$ 有三個一次整係數因式，同時得 $2x^3-3x^2-8x-3=0$ 有三個根 $-1,3,\dfrac{-1}{2}$，因爲這些數都是有理數，所以 $2x^3-3x^2-8x-3=0$ 恰有三個有理根。

從上面的觀察，你可以發現：多項式 $f(x)$ 有整係數一次因式 $ax-b$，就表示方程式 $f(x)=0$ 有有理根 $\dfrac{b}{a}$。只是，你並不清楚，爲何我會知道 $2x^3-3x^2-8x-3$ 可以分解成 $(x+1)(2x^2-5x-3)$ 呢？

$\boxed{\text{小結論}}$：關於整係數多項式 $f(x)$。當 a,b 均爲整數時，我們有

$$f(x)=(ax-b)q(x) \Longleftrightarrow \frac{b}{a} \text{ 是 } f(x)=0 \text{ 的有理根。}$$

3. 怎樣分解的

想知道怎樣分解「整係數」多項式，那就看看它們是「怎樣乘開的」?

如果 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=(2x+1)(x^2-2x-3)$，顯然 $a_3=2\times 1$，$a_0=1\times(-3)$。因此，如果我們想要分解 $2x^3+a_2x^2+a_1x-3$，即

$$2x^3+a_2x^2+a_1x-3=(ax-b)q(x) \text{ 時，}$$

這整係數一次因式 $ax-b$ 就「只可能」是：

$$x-1,\quad ,x-3,\quad ,x+1,\quad ,x+3,$$

$$2x-1,\quad ,2x-3,\quad ,2x+1,\quad ,2x+3,$$

這 8 種可能。於是你可以一一加以檢查，然後找到「眞正的因式」，也相當於找到 $f(x)=0$ 的「有理根」。

接下來你會面臨兩個問題：

問題 1：會不會檢查完之後，一個整係數一次因式都沒有？

問題 2：檢查的方法就是綜合除法嗎？有沒有快一點的方法呢？

4. 檢查沒有，就是沒有

事實上，如果檢查後沒有一次整係數因式，沒有找到，那就眞的沒有整係數一次因式。我們將這一個定理敍述如下：

$\boxed{\text{整係數一次因式檢查法}}$(有理根檢查法)：

設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ 是一個「整係數多項式」，且 a,b 爲「兩互質的整數」。我們有

$$f(x)=(ax-b)q(x)\Rightarrow a \text{ 整除 } a_n, b \text{ 整除 } a_0\text{。}$$

上面的定理說明：你的推論只能由左向右走，也就是說，有一次因式 $ax-b$，那 a 整除 a_n, b 整除 a_0，又如果 a 不整除 a_n 或者是 b 整除 a_0，那 $ax-b$ 就一定不是因式。

這說明，把有可能的檢查完就好，沒有檢查到，就表示沒有「一次整係數因式」，當然，也就沒有有理根。例如：x^2+x+1 就沒有一次整係數因式 (是嗎？)。

5. 怎樣檢測比較快

可能是：利用因式定理，即計算函數值 (例如：$f(\frac{2}{3})=0$，表示有 $3x-2$ 的因式)，然後利用綜合除法「降次」，一直到「二次式」後，就可以利用「公式解」或「十字交乘法」作最後的分解。

舉個例子：因式分解 $2x^4+3x^3-6x^2-4x+3$，或者是解方程式 $2x^4+3x^3-6x^2-4x+3=0$。可先找 $1,-1$，很幸運的 $f(-1)=0$，於是將多項式除以 $x+1$ 得

$$2x^4+3x^3-6x^2-4x+3=(x+1)(2x^3+x^2-7x+3)\text{，}$$

然後再針對 $2x^3+x^2-7x+3$ 測試 $1,-1,3,-3,\frac{1}{2},\cdots$，發現 $f(\frac{1}{2})=0$，因此，可繼續利用除法得

$$2x^4+3x^3-6x^2-4x+3=(x+1)(2x-1)(x^2+x-3)\text{，}$$

接下來就不再測試了，利用公式解可得：$x^2+x-3=0$ 的兩根爲 $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$，即

$$2x^4+3x^3-6x^2-4x+3=(x+1)(2x-1)(x-\frac{-1+\sqrt{13}}{2})(x-\frac{-1-\sqrt{13}}{2})\text{，}$$

$\boxed{\text{小結論}}$：

1. 先把可能的一次因式列出來。
2. 由最容易計算函數值的因式開始測試，若測試到了，就使用除法加以計算，當然此時的商式會比原來的多項式少一次。
3. 依次降次到二次多項式為止。
4. 最後使用公式解，達到完全分解。

值得注意的是：不是所有的多項式都可以這樣做的，除非問題設計者很明顯的告訴你可以完全分解。

6. 研讀後問題

1. 解方程式 $2x^4+x^3-7x^2-9x+6=0$。
2. 解方程式 $2x^3+7x^2-7x-5=0$。
3. 已知整係數方程式 $x^3+ax^2+bx+5=0$ 有三個相異的有理根，求 a,b 的值。
4. 已知整係數方程式 $f(x)=0$ 有有理根 $\dfrac{-d}{c}$，問：整係數多項式 $f(x)$ 必有哪一個一次因式？
5. 敘述整係數一次因式檢查法。