虛根共軛

bee[*]

104.11.01 ～ 104.11.01

主角是實係數方程式，變數範圍是複數平面，
高一多項式最難懂的一部份。

1. 從實係數二次方程式開始

我們知道引進 $i=\sqrt{-1}$ 這一個符號後，讓我們在形式上得到一元二次方程式都恰有兩個根，對於「實係數的一元二次方程式」，有底下的最終結論：

$\boxed{\text{實係數的一元二次方程式的根}}$ (最終分析)：

若規定 $D=b^2-4ac$，則實係數方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的「最終代數結論」爲：

1. 當 $D>0$ 時，方程式有兩相異實根 $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。
2. 當 $D=0$ 時，方程式有兩相等實根 $x=\dfrac{-b}{2a}$。
3. 當 $D<0$ 時，方程式有兩共軛虛根 $\dfrac{-b\pm\sqrt{4ac-b^2}i}{2a}$。

這也說明任意實係數二次多項式 ax^2+bx+c 都可以分解成

$$ax^2+bx+c=a(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a})(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a})。$$

例如：$x^2-2x+5=(x-(1+2i))(x-(1-2i))$。

那反過來，我想問：如果給你一個複數，例如：$1+2i$，你可不可以找一個實係數多項式方程式，使得 $1+2i$ 恰好是這一個方程式的一根。

你當然會說，那就是 $x^2-2x+5=0$。對的，利用共軛的概念，我們由

[*]bee 美麗之家: http:/www2.chsh.chc.edu.tw/bee

$$(x-(1+2i))(x-(1-2i))=0 \Rightarrow x^2-2x+5=0。$$

可得我們要的方程式。當然，你也可以用底下的作法：

設 $x=1+2i$。

則 $x-1=\underline{\quad\quad}2i \Rightarrow (x-1)^2=(\underline{\quad\quad}2i)^2$

$$\Rightarrow x^2-2x+5=0$$

(想想看：____ 裡面該填入甚麼？)

由上面的討論，我們似乎可以感覺到：關於 $1+2i$ (或者是 $1-2i$) 的實係數方程式，最簡單的就是 $x^2-2x+5=0$，而關於 $\alpha+\beta i$ (或者是 $\alpha-\beta i$)，那麼，關鍵的實係數二次方程式應該就是

$$(x-(\alpha+\beta i))(x-(\alpha-\beta i))=0$$

2. 實係數方程式虛根共軛

問題 1：若實係數方程式 $f(x)=0$ 有一複數根 $1+2i$，是否 $f(x)=0$ 也有另一個根 $1-2i$ 呢？

這問題很難喔！太難了，怎辦？

我們需要「除法」與「關鍵二次多項式」來幫忙，並可得到一個非常棒的性質。

$\boxed{\text{定理}}$：設 $f(x)$ 是一個實係數多項式，則共軛變數的函數值亦為共軛，即

$$f(\alpha+\beta i)=A+Bi \Longleftrightarrow f(\alpha-\beta i)=A-Bi$$

這一個定理如果是正確的，那麼問題 1 就變得非常簡單。
因為 $f(1+2i)=0=0+0i$，所以很顯然的，$f(1-2i)=0-0i=0$。

好！接下來我們來用證明這一個非常棒的定理。

$\boxed{\text{證明}}$：設 $x^2+bx+c=(x-(\alpha+\beta i))(x-(\alpha-\beta i))$，這就是關鍵的二次多項式，然後利用除法，可將任意實係數多項式 $f(x)$ 寫成

$$f(x)=(x^2+bx+c)q(x)+dx+e,$$

分別將 $\alpha+\beta i, \alpha-\beta i$ 代入 $f(x)$ 可得

$$f(\alpha+\beta i)=0+d(\alpha+\beta i)+e=(d\alpha+e)+\beta i=A+Bi$$
$$f(\alpha-\beta i)=0+d(\alpha-\beta i)+e=(d\alpha+e)-\beta i=A-Bi$$

也就是說，$f(\alpha+\beta i)$ 和 $f(\alpha-\beta i)$ 的值互為共軛複數。此定理得證。

當然，如果 $f(\alpha+\beta i)=0$，顯然 $f(\alpha-\beta i)$ 也會等於 0，也就是所謂的虛根共軛出現囉。

推論：設 $f(x)$ 是一個實係數多項式，我們有

$$f(\alpha+\beta i)=0 \Longleftrightarrow f(\alpha-\beta i)=0$$

3. 高斯代數基本定理

這裡我們要介紹高中少數無法證明的定理：高斯的代數基本定理。

代數基本定理：對於任意 n 次多項式 $f(x)$ (可推廣至複係數多項式)，至少有一個複數根 α，即 $f(\alpha)=0$。

於是利用因式定理，我們可以將 $f(x)$ 因式分解成 $f(x)=(x-\alpha)q_1(x)$，而 $\deg q_1(x)=n-1$，然後再利用代數基本定理依序降次，然後得到推論。

推論：設 $f(x)$ 是一個 n 次多項式，則 $f(x)$ 可以分解成

$$f(x)=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)。$$

即 $f(x)$ 可以被完全分解。

4. 實係數高次多項式可以怎樣分解

好！那我們來看看「高次實係數多項式」的分解會出現怎樣的情形。

設 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ 是 n 次實係數多項式，如果 $f(x)=0$ 恰有實根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，那麼利用「因式定理」，可將 $f(x)$ 分解成：

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_m)q(x)，\deg q(x)=n-m。$$

因為 $q(x)$ 沒有實數根，那根據高斯的代數基本定理可得：$q(x)=0$ 的根都是「虛數根」。根據前面的探索，我們知道：因為 $q(x)$ 是實係數多項式，所以 $q(x)=0$ 的虛數根，都必須「共軛出現」，也就是得「成雙成對」，因此，$n-m$ 是一個偶數，同時，$q(x)$ 是一些「二次實係數多項式的乘積」。即

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_m)q(x)\\&=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_m)(x^2+b_1x+c_1)\cdots(x^2+b_kx+c_k)\end{aligned}$$

5. 總結

不知道你是否清楚我上面的說明是啥？

用口語說一下，針對「實係數方程式」:

1. $f(x)=0$ 的虛數根一定是共軛出現的，也就是說有 $\alpha+\beta i$ 就會有 $\alpha-\beta i$，也因此虛數根出現的次數恰爲偶數次。
2. 虛數根以外的就是實數根，實數根就是 $y=f(x)$ 的圖形和 x 軸的交點的 x 坐標。實數根可能有重根的情形，這我們以後再討論。
3. 以複數作爲分解標準，實係數多項式是可以完全分解成一次式的。
4. 但是，若以實數爲分解標準，那麼分解式就是屬於實根的一次式和屬於虛根的二次式。

最後你關心的是：那考試考啥？

6. 研讀後問題

1. 已知 $f(x)=x^3+bx^2+cx+5$ 是一個實係數多項式，且 $f(2-i)=0$，求 b,c。
2. 已知 $f(x)$ 是一個實係數多項式，且 $f(2-i)=3+2i$，求 $f(2+i)$ 的值。
3. 試說明實係數多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的實根個數可能是多少？
4. 若 $1-i$ 是 $x^2+x-a=0$ 的一根，求另外一根。
5. 敍述「代數基本定理」。
6. 敍述關於實係數多項式 $f(x)$ 的共軛變數函數值定理。
7. 敍述關於實係數多項式 $f(x)$ 的共軛虛根定理。