

二次方程式根與係數的關係

bee*

104.11.01 ~ 104.11.01

一個月考必考的問題，我們來動手試試看。

1. 課本習題

問題 1：設 $x^2 + 8x + 1 = 0$ 的兩根為 α, β ，求下列各式的值：

$$(1) \alpha^2 + \beta^2 \quad (2) \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} \quad (3) \alpha^3 + \beta^3$$

你要不是自己先試試看。

正常作法：

(a) 先公式解： $\alpha = \frac{-8 + \sqrt{60}}{2}, \beta = \frac{-8 - \sqrt{60}}{2}$ 。

(b) 直接平方相加：應該不好算，當然你應該試試看！

(c) 課本作法：

$$\text{因為 } x^2 + 8x + 1 = (x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha \cdot \beta,$$

$$\text{所以 } \alpha + \beta = -8, \alpha \cdot \beta = 1。$$

$$\text{故 (1) } \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha \cdot \beta = (-8)^2 - 2 \cdot 1 = 62,$$

$$(2) \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha \cdot \beta} = \frac{62}{1} = 62,$$

$$(3) \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha \cdot \beta + \beta^2) = (-8) \cdot (62 - 1) = -488。$$

想想看！「沒有其他作法」？(你會不會抱怨，這樣就很好了，難道一定得想其他方法？)

2. 純粹好玩

*bee 美麗之家: <http://www2.chsh.chc.edu.tw/bee>

其實純粹好玩，底下我們試試看喔！

因為我們知道 $\alpha + \beta = -8, \alpha \cdot \beta = 1$ ，又兩根 α, β 滿足方程式，即

$$\alpha^2 + 8\alpha + 1 = 0, \beta^2 + 8\beta + 1 = 0。$$

底下我們嘗試其他想法試試看：

(1) $\alpha^2 + \beta^2 = (-8\alpha - 1) + (-8\beta - 1) = -8(\alpha + \beta) - 2 = 64 - 2 = 62。$

(2) 由 $\alpha \cdot \beta = 1$ ，可得 $\frac{1}{\alpha} = \beta, \frac{1}{\beta} = \alpha$ ，因此 $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \beta^2 + \alpha^2 = 62。$

(3) $\alpha^3 + \beta^3 = \alpha^2 \cdot \alpha + \beta^2 \cdot \beta = (-8\alpha - 1) \cdot \alpha + (-8\beta - 1) \cdot \beta$
 $= -8(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha + \beta) = -8 \cdot (62 - 1) = -488。$

其實，我只是純粹搞怪喔！

3. 總結

關於二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ，設其兩根為 α, β ，我們可以由「因式定理」得到：

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) = ax^2 - a(\alpha + \beta)x + a\alpha\beta，$$

進而得到

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{2a}, \alpha\beta = \frac{c}{2a}$$

的關係式，然後利用這關係式，可以問一些問題。這關係式你可以背起來，也可以像我這樣重新推導一次，隨你開心。

至於解題，建議你自由心證，任意試試看，這樣子比較有趣喔！

4. 研讀後問題

1. 設 $2x^2 + 4x + 5 = 0$ 的兩根為 α, β ，求下列各式的值：

(1) $\alpha^2 + \beta^2$ (2) $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$ (3) $\alpha^3 + \beta^3$ (4) $\alpha^4 + \beta^4$ (5) 兩種方法求 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

2. 想想看：關於三次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ，若三根分別為 α, β, γ ，有沒有相類似的根與係數的關係呢？