

多項式不等式

bee*

104.11.07 ~ 104.11.07

本篇文章討論多項式不等式，
不過，解題的過程其實是：畫出多項式函數的草圖來。

1. 多項式不等式

先看看啥麼叫做多項式不等式。設 $f(x)$ 是一個「實係數多項式」，則

$$f(x) > 0, f(x) \geq 0, f(x) < 0, f(x) \leq 0$$

就是所謂的多項式不等式。

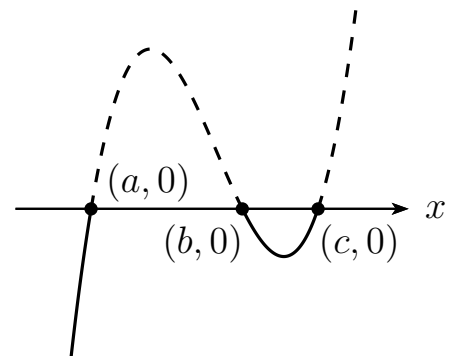
例如： $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$, $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \leq 0$ 等。

設 $y = f(x)$ 是一個多項式，我們有底下的幾點認識：

1. 方程式 $f(x) = 0$ 的實數解表示 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸之交點的 x 坐標。
2. 不等式 $f(x) > 0$ 的實數解表示 $y = f(x)$ 在 x 軸上方的圖形，其 x 的範圍。
3. 不等式 $f(x) < 0$ 的實數解表示 $y = f(x)$ 在 x 軸下方的圖形，其 x 的範圍。

例如：右圖中

- 方程式 $(x-a)(x-b)(x-c) = 0$ 的解為 $x = a, b, c$ 。
- 不等式 $(x-a)(x-b)(x-c) > 0$ 的解為 $a < x < b, x > c$ 。
- 不等式 $(x-a)(x-b)(x-c) < 0$ 的解為 $x < a, b < x < c$ 。



*bee 美麗之家: <http://www2.chsh.chc.edu.tw/bee>

因此，只要我們可以找出多項式函數 $y = f(x)$ 和 x 軸的交點，並畫出 $y = f(x)$ 的圖形草圖來，就可以寫出不等式的解範圍，這就是所謂的「解多項式不等式」。

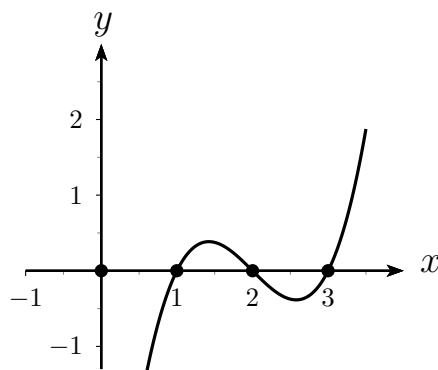
底下我們來看看兩個例子 $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ 與 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \leq 0$ 的解分別為何？

2. 實作

例題 1. 解不等式 $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ 。

解：先畫出函數 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ 的草圖。由圖可知：

- 方程式 $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$ 的解為 $x = 1, 2, 3$ 。
- 不等式 $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ 的解為 $1 < x < 2, 3 < x$ 。



- 不等式 $(x-1)(x-2)(x-3) \geq 0$ 的解為 $1 \leq x \leq 2, 3 \leq x$ 。
- 不等式 $(x-1)(x-2)(x-3) < 0$ 的解為 $x < 1, 2 < x < 3$ 。
- 不等式 $(x-1)(x-2)(x-3) \leq 0$ 的解為 $x \leq 1, 2 \leq x \leq 3$ 。

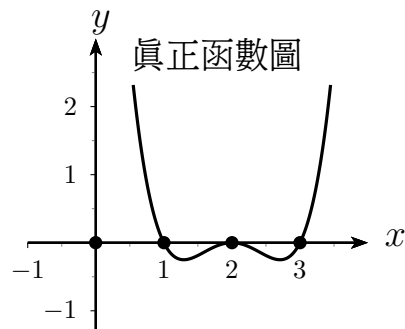
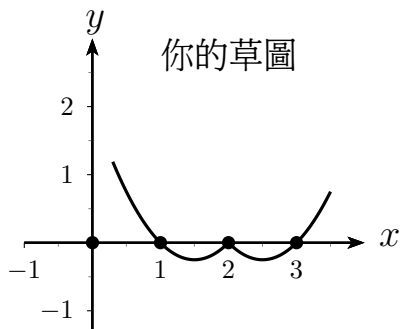
完全看圖說故事，一點都不用傷腦筋。但是，你得很老實地畫出函數圖形來。

例題 2. 解不等式 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \leq 0$ 。

解：這題其實不只是考不等式，重點是要你先解方程式 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ 。利用一次因式檢查法，可分解得 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$ ，然後利用例題 1 的結論即可。

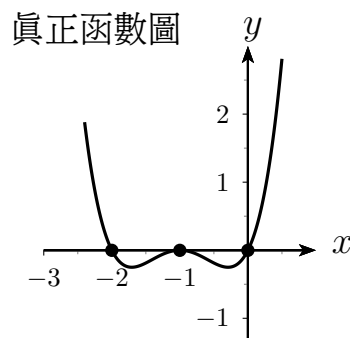
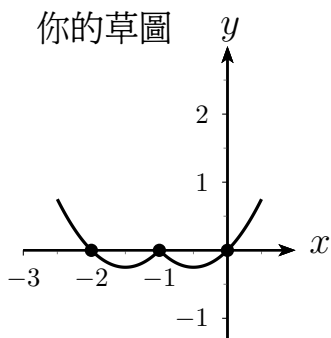
3. 挑戰一下

例題 3. 解不等式 $(x - 1)(x - 2)^2(x - 3) > 0$



解： $x < 1$ 或 $x > 3$

例題 4. 解不等式 $x(x + 1)^2(x + 2)^3 \leq 0$



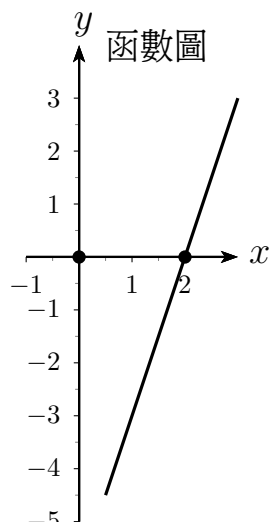
解： $-2 \leq x \leq 0$

4. 低次函數實作

例題 5. 畫函數圖形解不等式 $3x - 6 \leq 0$ 。

解： $y = 3x - 6$ 的函數圖形如右。

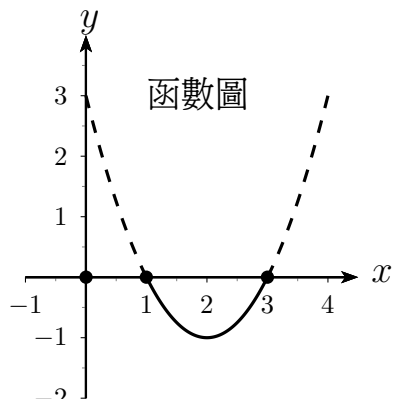
不等式的解為 $x \leq 2$ 。



例題 6. 畫函數圖形解不等式 $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ 。

解： $y = x^2 - 4x + 3$ 的函數圖形如右。

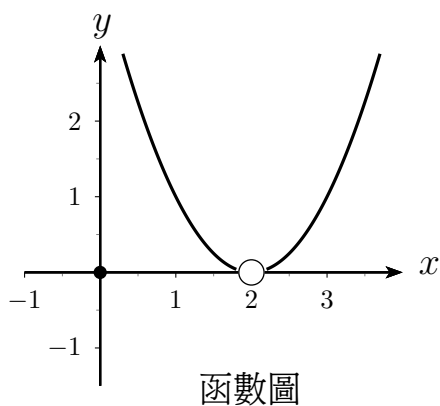
不等式的解為 $1 \leq x \leq 3$ 。



例題 7. 畫函數圖形解不等式 $x^2 - 4x + 4 > 0$ 。

解： $y = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ 的函數圖形

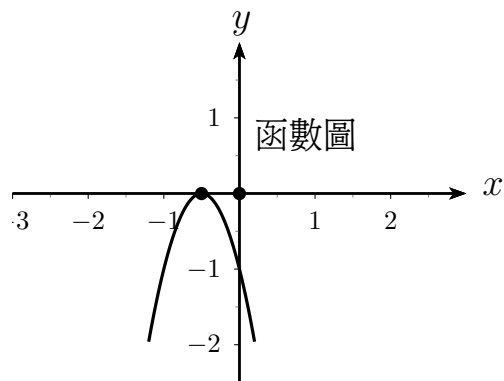
如右。不等式的解為 $x \neq 2$ 。



例題 8. 畫函數圖形解不等式 $-4x^2 - 4x - 1 > 0$ 。

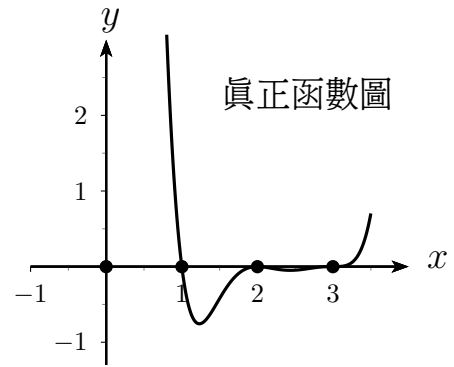
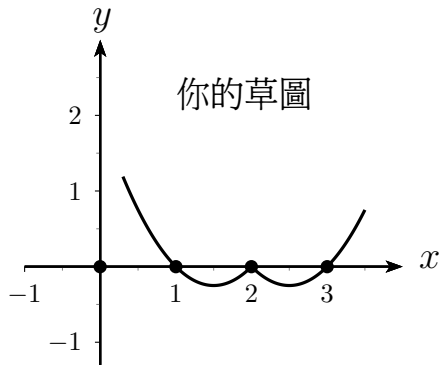
解： $y = -4x^2 - 4x + 1 = -(2x + 1)^2$ 的函數圖

形如右。不等式的解為「無實數解」。



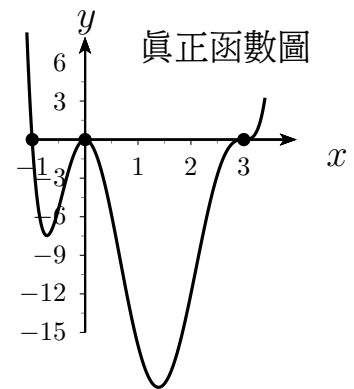
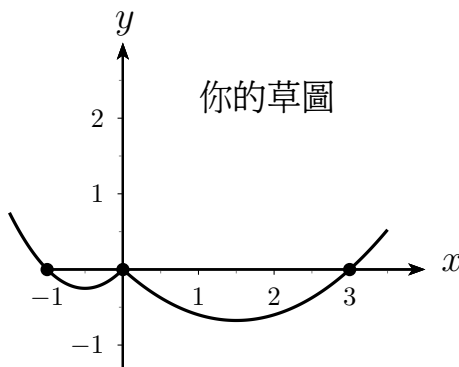
5. 高次不等式實作

例題 9. 畫函數圖形解不等式 $(x - 1)(x - 2)^2(x - 3)^3 \leq 0$ 。



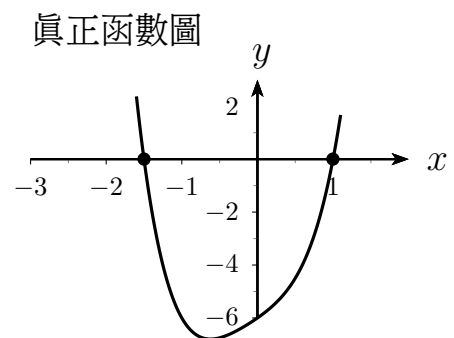
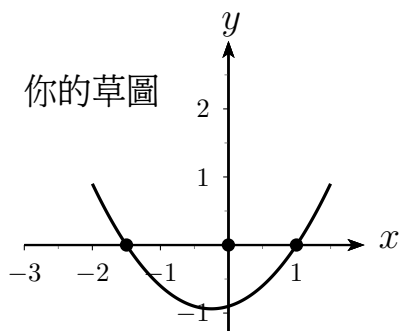
解： $x < 1$ 或 $x > 3$

例題 10. 畫函數圖形解不等式 $x^2(x+1)(x-3)^3 > 0$ 。



解： $x < -1$ 或 $x > 3$

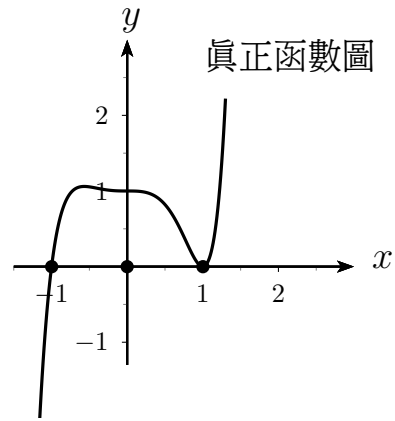
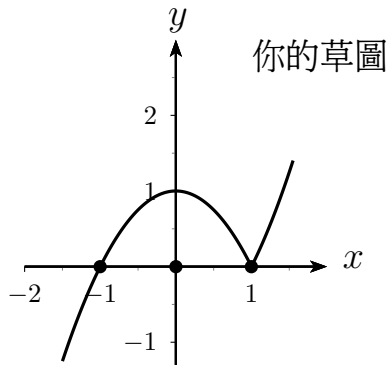
例題 11. 畫函數圖形解不等式 $(x-1)(x^2+2)(2x+3) \geq 0$ 。



解： $-2 \leq x \leq 0$

例題 12. 畫函數圖形解不等式 $(x^2+1)(x^2-1)(x^3-1) > 0$

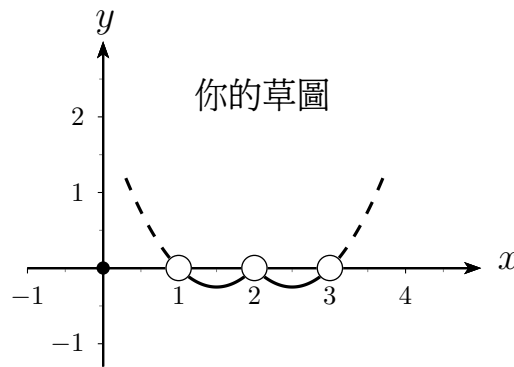
先分解 $(x^2+1)(x^2-1)(x^3-1) = (x^2+1)(x-1)(x+1)(x-1)(x^2+x+1)$
 $= (x+1)(x-1)^2(x^2+1)(x^2+x+1)$ 。



解： $-1 < x < 1$ 或 $x > 1$

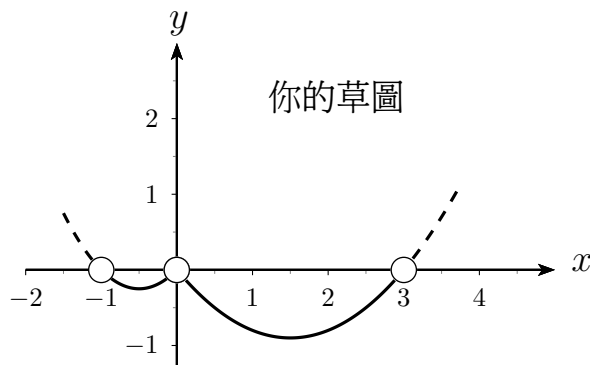
6. 不等式陷阱題實作

例題 13. 畫函數圖形解不等式 $(x - 1)(x - 2)^2(x - 3)^3 < 0$ 。



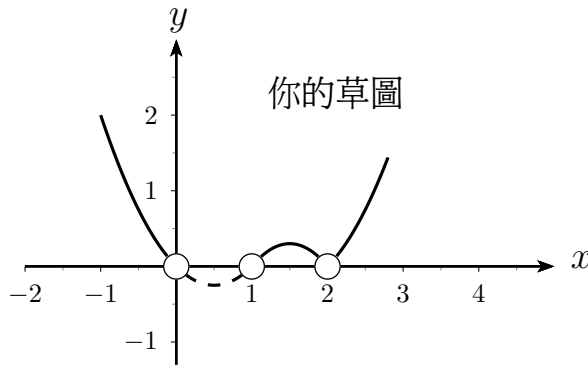
解： $1 < x < 2$ 或 $2 < x < 3$

例題 14. 畫函數圖形解不等式 $x^2(x + 1)(x - 3)^3 \geq 0$ 。



解： $x \leq -1$ 或 $x = 0$ 或 $x \geq 3$

例題 15. 畫函數圖形解不等式 $x(x-1)(x-2)^2 > 0$ 。



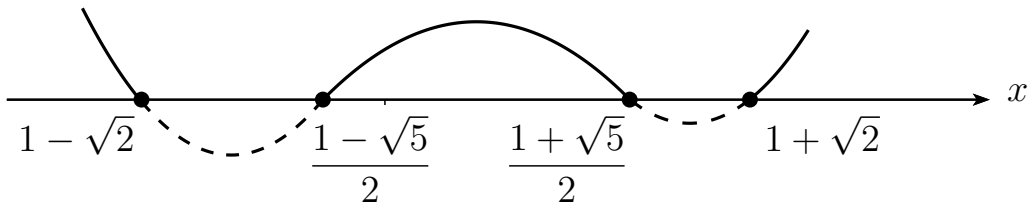
解： $x \leq -1$ 或 $1 < x < 2$ 或 $x > 2$

例題 16. 畫函數圖形解不等式 $(x^2 - x - 1)(x^2 - 2x - 1) \geq 0$

先分解 $(x^2 - x - 1)(x^2 - 2x - 1)$

$$= \left(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) (x - (1 + \sqrt{2})) (x - (1 - \sqrt{2}))$$

你的草圖



解： $x \leq 1 - \sqrt{2}$ 或 $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 或 $x \geq 1 + \sqrt{2}$

補充說明：事實上你畫草圖時，並不需要按標準的距離繪圖，只要能夠把大小順序排好即可。因為，這只是草圖。但是怎樣比較各數的大小，是一個困難的問題，要好好研究。

7. 研讀後問題

1. 解不等式 $2x - 1 < -3x + 9$ 。
2. 解不等式 $6 - 5x - x^2 < 0$ 。
3. 解不等式 $x^2 - 4x + 4 \leq 0$ 。
4. 解不等式 $x^2 + x + 1 > 0$ 。
5. 解不等式 $(x - 2)(3x^2 - 2x - 1) > 0$ 。
6. 解不等式 $(x^2 - 2)(x^2 - 2x - 3) \leq 0$ 。