

分式不等式

bee*

104.11.04 ~ 104.11.09

本篇文章討論分式不等式，
不過，沒有辦法畫分式的草圖，得想辦法變形才行！

1. 分式不等式

先說明何為分式：對於兩個多項式 $f(x), g(x)$ 相除所列出來的式子 $\frac{f(x)}{g(x)}$ ，稱為分式。例如： $\frac{2x-1}{x+1}, \frac{x^2+x+2}{(x-3)(x-4)}$ 。

於是，設 $f(x)$ 是一個「實係數分式函數」，則

$$f(x) > 0, f(x) \geq 0, f(x) < 0, f(x) \leq 0$$

就是所謂的分式不等式。

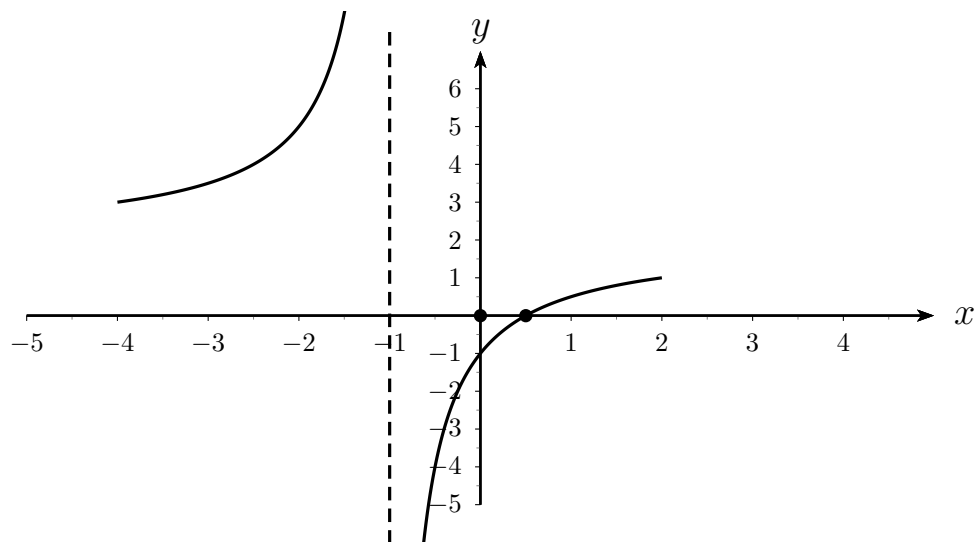
例如： $\frac{2x-1}{x+1} > 0, \frac{x^2+x+2}{(x-3)(x-4)} \leq 0$ 等。

我們知道，對於多項式函數，只要畫出 $y = f(x)$ 的圖形草圖來，就可以寫出不等式的解範圍，但是，對於分式，我們並不容易畫出其草圖。例如：

函數 $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ 的函數圖形如下圖所示，在 $x = -1$ 時，函數值不存在，這地方會產生「漸近線」，當然，你可以由圖看到：當 $x < -1$ 或 $x > \frac{1}{2}$ 時，可以得到函數值 $f(x) > 0$ ，但是，分式函數的圖形實在很不容易繪製，我們的辦法是：借助多項式來幫忙。那，

該怎麼做呢？

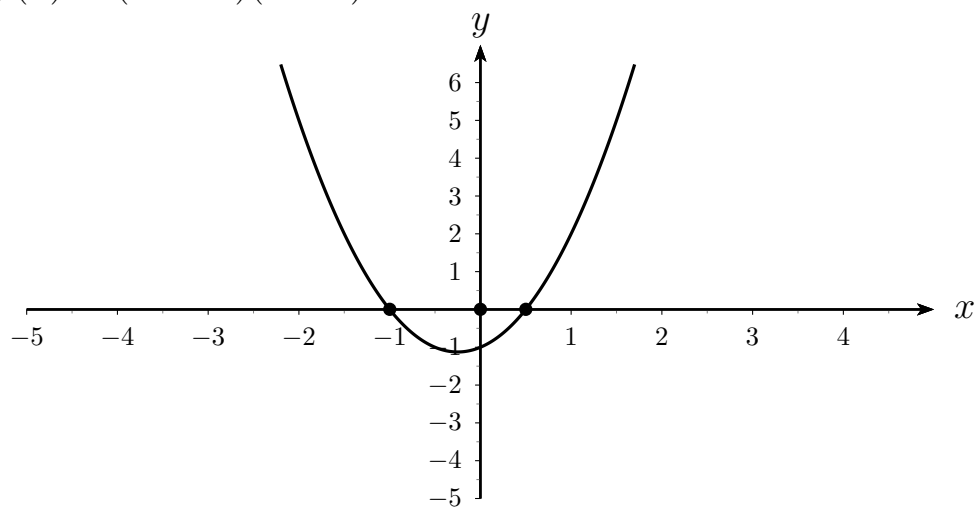
*bee 美麗之家: <http://www2.chsh.chc.edu.tw/bee>



當 $\frac{b}{a} > 0$ 時，表示 a, b 兩數「同號」，換成另一個算式為 $ab > 0$ 。因此，我們可以將分式不等式 $\frac{2x-1}{x+1} > 0$ 改寫成不等式 $(2x-1)(x+1) > 0$ ，而這兩個不等式的「解範圍」是一樣的，即

$$\frac{2x-1}{x+1} > 0 \iff (2x-1)(x+1) > 0$$

我們畫出 $f(x) = (2x-1)(x+1)$ 的函數圖形來，如下圖所示：



仔細比較一下兩個圖形，我們可以發現大於 0 的範圍都一樣，即解範圍都是 $x < -1$ 或 $x > \frac{1}{2}$ 。

再多看一下，兩個圖形小於 0 的解範圍也是一樣，都是 $-1 < x < \frac{1}{2}$ ，但是，等於 0 的位置不同，分式函數的圖形僅有一點 $x = \frac{1}{2}$ ，而多項式函數則多一點 $x = -1$ 。想一下原因何在？

主要是因為分式的分母不可以為 0，所以少了一個點。這是分式函數與多項式函數最大的不同。

因此，當我們考慮不等式 $\frac{2x-1}{x+1} > 0$ 就得小心分母的部分，即

$$\frac{2x-1}{x+1} \geq 0 \iff (2x-1)(x+1) \geq 0, \text{ 但 } x+1 \neq 0。$$

由於上面的觀察，我們可以利用將分式不等式轉換成多項式不等式，然後利用多項式的草圖來求分式不等式的解範圍，只是要注意一點：

要特別考慮分母為 0 的位置。

2. 實作

我們練習一題就好，剩下的部分你自己想辦法喔！

例題：求不等式 $\frac{3}{x+2} \leq x$ 。

解：我們將此題分成幾個步驟：

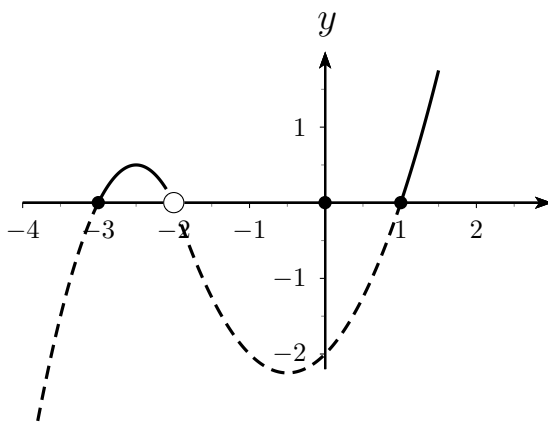
步驟一：先移項改成 $\frac{3}{x+2} - x \leq 0 \Rightarrow \frac{-x^2 - 2x + 3}{x+2} \leq 0$ 。

這很重要，讓不等式的一邊等於 0，這樣我們才能將分式變形為多項式。

步驟二：改成多項式不等式

$$\begin{aligned} \frac{-x^2 - 2x + 3}{x+2} \leq 0 &\iff (-x^2 - 2x + 3)(x+2) \leq 0, \text{ 但 } x+2 \neq 0。 \\ &\iff (x^2 + 2x - 3)(x+2) \geq 0, \text{ 但 } x+2 \neq 0。 \\ &\iff (x-1)(x+3)(x+2) \geq 0, \text{ 但 } x+2 \neq 0。 \end{aligned}$$

步驟三：畫出草圖，注意 $x = -2$ 處是空點喔！



所以答案爲： $-3 \leq x < -2$ 或 $x \geq 1$ 。

3. 研讀後問題

1. 解不等式 $\frac{(x-1)(x-2)^2}{(x-3)^3} > 0$ 。

2. 解不等式 $\frac{x+6}{x-4} < x$ 。

3. 解不等式 $\frac{2x^2+x-2}{x^2-x+1} < 1$ 。

4. 解不等式 $x \geq \frac{1}{x}$ 。

5. 解不等式 $\frac{x^2+x+2}{(x-3)(x-4)} \leq 0$ 。