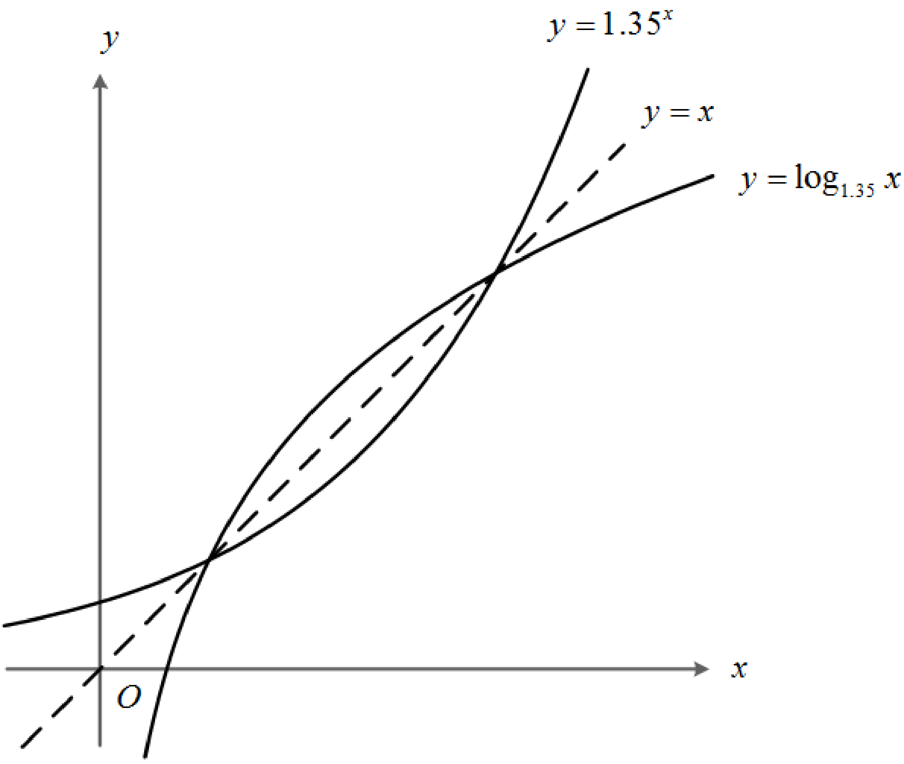
Chapter 3

指數與對數



讓我們發展一個簡單的工具，

解答 2016^{2016} 是幾位數？

～ *bee*

對數的發明，

延長了天文學家的壽命。

～拉普拉斯

3.1 指數

「指數」是表示連乘積的簡便計數符號，本節中我們將指數符號作進一步的發展，得到：(1) 實數指數表示法及其意義。例如底下的各種指數符號：

$$2^0$$
$$2^{-1}, 2^{-2016}$$
$$2^{\frac{1}{3}}, 2^{0.1}, 2^{1.414}$$
$$2^{\sqrt{2}}, 2^{\pi}$$

(2) 借由指數表示法，讓乘法變得比較簡單。例如讓根式的乘法變簡單。

將來，我們希望將所有的正實數都寫成指數型態，並利用指數運算來取代乘法，得到「用加法來計算乘法」的便利性，進而得到「估計大量乘法運算之數值」的方法。例如瞭解 2016^{2016} 是幾位數。

3.1.1 指數與指數律

指數符號 a^n 表示 n 個 a 的連乘積，即

$$a^n = \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n \text{ 個 } a},$$

符號 a^n 讀做「a 的 n 次方」，其中 n 稱爲「指數」，a 稱爲「底數」。

有了指數符號，我們可以讓連乘積的表示變得很簡潔。例如：3^{20} 表示 20 個 3 的連乘積，這樣我們就不需要連續寫 20 個 3 的連乘式。

指數有一些基本的運算規律，我們先看一個例題。

例題 **1.** 回答下面幾個問題：

(1) $5^3 \times 5^4$ 是 5 的幾次方？

(2) $(5^3)^4$ 是 5 的幾次方？

(3) $3^3 \times 7^3$ 是不是等於 $(3 \times 7)^3$？

解：(1) $5^3 \times 5^4 = (5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5 \times 5) = 5^{3+4} = 5^7$。

(2) $(5^3)^4 = 5^3 \times 5^3 \times 5^3 \times 5^3 = 5^{3\times 4} = 5^{12}$。

(3) $3^3 \times 7^3 = (3 \times 7)^3 = 21^3$。 ■

一般而言，關於指數的乘法運算，有如例題 1 的運算規律，我們稱之為 **指數律** ：

> 指數律：當 a 是一個實數，且 m, n 是正整數時，則
> (1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$
> (2) $(a^m)^n = a^{m\times n}$
> (3) $a^n \times b^n = (ab)^n$

觀察指數律，我們發現：

(1) $a^m \times a^n$ 是連乘積，但是 a^{m+n} 做的僅僅是「 指數加法 」。

(2) $(a^m)^n$ 是 n 組數的連乘積，而 $a^{m\times n}$ 只要在指數部分作一次乘法。

(3) $a^n \times b^n$ 是分別的連乘積，而 $(ab)^n$ 表示可以一併處理。

指數律中「 等式右邊的計算量比左邊的計算量少 」，這是使用指數律作乘法運算的優點。

3.1.2 根式與根式乘法

接下來，我們來複習根式符號，看看你是不是還記得這些符號的意思。

例題 **2.** 根式的意義：

(1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 3$，即 $(\sqrt{3})^2 = 3$。

(2) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2} = 2$，即 $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$。

(3) $\sqrt[5]{7}\cdot\sqrt[5]{7}\cdot\sqrt[5]{7}\cdot\sqrt[5]{7}\cdot\sqrt[5]{7} = 7$，即 $(\sqrt[5]{7})^5 = 7$。 ■

當 $a > 0$ 時，根式符號 $\sqrt[n]{a}$ (讀做 a 的 n 次方根) 表示滿足方程式 $x^n = a$ 的正實數解，即

$$\overbrace{\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{a}\times\cdots\times\sqrt[n]{a}}^{n \text{ 個 } \sqrt[n]{a}} = a$$

這解是一個正實數 (而且只能找到一個)，例如：$\sqrt[3]{2}$ 是 $x^3 = 2$ 的正實數解，即 $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$，$\sqrt[3]{2}$ 大約是 1.260，就只有這一個「 正實數 」會滿足 $x^3 = 2$。

為何我們要用符號 $\sqrt[n]{a}$ 來表示 $x^n = a$ 的正實數解呢？因為大部分的 n 次方根都是無理數，沒有辦法用分數或循環小數表示，所以數學家創造美麗的符號 $\sqrt[n]{a}$ 來表示。

當你做數學運算時，必須知道 $(\sqrt[n]{a})^n = a$，你也可以利用計算機求出其近似值再加以計算。

底下我們來複習一下根式的乘法。

例題 3. 化簡下面各式乘法，寫出其值：

(1) $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{2}\times\sqrt[4]{2}$ (3) $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}$

解：(1) $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times 3}=\sqrt{6}$。

(2) $\sqrt{2}\times\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{2^2}\times\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{4\times 2}=\sqrt[4]{8}$。

(3) $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[2\times 3]{2^3}\times\sqrt[3\times 2]{3^2}=\sqrt[6]{8\times 9}=\sqrt[6]{72}$。 ■

想想看！你淸楚上面的作法嗎？底下我們作更詳細的解釋。

(1) 因爲 $(\sqrt{2}\times\sqrt{3})^2=(\sqrt{2})^2\times(\sqrt{3})^2=2\times 3$，所以 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times 3}=\sqrt{6}$。

同理可推得：$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{2\times 3}$，$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\times b}$。

(2) 因爲 $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2=(\sqrt[4]{2}\times\sqrt[4]{2})\times(\sqrt[4]{2}\times\sqrt[4]{2})$，所以 $\sqrt{2}=\sqrt[4]{2}\times\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{2^2}$。

(3) 因爲 $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2=(\sqrt[6]{2}\times\sqrt[6]{2}\times\sqrt[6]{2})\times(\sqrt[6]{2}\times\sqrt[6]{2}\times\sqrt[6]{2})$，

所以 $\sqrt{2}=\sqrt[6]{2}\times\sqrt[6]{2}\times\sqrt[6]{2}=\sqrt[2\times 3]{2^3}$。

又因爲 $\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{3}=3=(\sqrt[6]{3}\times\sqrt[6]{3})\times(\sqrt[6]{3}\times\sqrt[6]{2})\times(\sqrt[6]{3}\times\sqrt[6]{3})$，

所以 $\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{3}\times\sqrt[6]{3}=\sqrt[3\times 2]{3^2}$。

同理可推得：$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n\times m]{a^m}$。

因此 $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[2\times 3]{2^3}\times\sqrt[3\times 2]{3^2}=\sqrt[6]{8\times 9}=\sqrt[6]{72}$。

同理可推得：$\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[m\times n]{a^n}\times\sqrt[n\times m]{b^m}=\sqrt[mn]{a^n\times b^m}$。

整理一下上面的討論，有以下的結論：根式乘法的運算法則。

> 根式乘法的運算法則：當 a,b 是正實數，m,n 是正整數時，則
>
> (1) $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\times b}$
>
> (2) $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n\times m]{a^m}$
>
> (3) $\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[m\times n]{a^n}\times\sqrt[n\times m]{b^m}=\sqrt[mn]{a^n\times b^m}$

課堂討論

1. 化簡下列各式乘法，寫出其值：

(1) $(\sqrt{2})^3 \times (\sqrt{2})^5$　　(2) $\left((\frac{1}{\sqrt{3}})^3\right)^2$　　(3) $(\sqrt{6})^4 \times (\frac{1}{\sqrt{2}})^4$

2. 化簡下列各式：

(1) $\sqrt[4]{8} \times \sqrt[4]{32}$　　(2) $\sqrt[3]{36} \times \sqrt{6}$　　(3) $\dfrac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt{2}}$

3. 說明根式運算法則：$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

4. 與同學相互說明 (1) 指數律 (2) 根式乘法的運算規則。

在前面的討論中，我們認識了根式符號的意義和根式乘法的運算法則，底下我們將引進新的指數符號，並利用指數律來簡化根式的乘法運算，讓計算變的簡單。

3.1.3 整數指數與分數指數的建立

我們介紹幾個新的指數符號，並規定其意義：

$$a^0 = 1，a^{-1} = \tfrac{1}{a}，a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}。$$

這些新符號的乘法運算可以符合指數律，底下我們說明其規定的由來，並由「連乘積的感覺」出發，去體會這些符號的意思。

(1) 由指數律 $a^n = a^{0+n} = a^0 \times a^n$，可得 $a^0 = \dfrac{a^n}{a^n} = 1$。

(2) 由指數律 $1 = a^0 = a^{(-n)+n} = a^{-n} \times a^n$，可得 $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$。

(3) 由指數律 $a = a^1 = a^{\frac{1}{n}\times n} = (a^{\frac{1}{n}})^n$，可得 $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$。

再利用 $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$，可得

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = a^{\frac{mk}{nk}}。$$

利用指數律的概念，我們建立零指數、負指數、分數指數的新符號。即：

> 整數指數與分數指數：當 a 是正實數，m, n, k 是正整數時，則
>
> (1) $a^0 = 1$
>
> (2) $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$
>
> (3) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
>
> (4) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} == \sqrt[nk]{a^{mk}} = a^{\frac{mk}{nk}}$

如果，我們用「連乘積」來感覺一下這幾個符號，也相當精采。

因爲指數符號的原意是「連乘積」，所以在「乘法的世界裡」:

(1) a^0 表示「沒有作乘法」，這和「乘與 1」是一樣的意思，因此 $a^0 = 1$。

(2) a^{-n} 表示「少乘了 n 個 a」，這和「除以 n 個 a」是一樣的意思，因此負指數就變成了倒數 (除法)，即 $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$。

(3) 連續乘以 n 次 $\sqrt[n]{a}$ 才得到與「乘與 1」一樣的效果，因此就「乘法而言」，一個 $\sqrt[n]{a}$ 就是 $\dfrac{1}{n}$ 個 a 的意思，即 $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$。

同時，所有根式 $\sqrt[n]{a^m}$ 都可以用分數指數 $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}}$ 來表示，將來作根式計算時，我們可以使用指數律來幫忙。

底下我們重做一次例題 3。

例題 **4.** 化簡下面各式的乘法：(原例題 3)

(1) $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = (2 \times 3)^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$。

(2) $\sqrt{2} \times \sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$。

(3) $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3} = 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{6}} \times 3^{\frac{2}{6}} = (2^3)^{\frac{1}{6}} \times (3^2)^{\frac{1}{6}} = (8 \times 9)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{72}$。 ■

分數指數的建立，讓我們看到數學家豐富的想像力，而建立分數指數之後，根式的乘法可轉換成「分數指數的加法」，這實在是很精彩的事情。

因爲根式 $\sqrt[n]{a}$ 只在 $a > 0$ 時才有意義，所以使用分數指數 $\sqrt[n]{a}$ 時，要避免 $a \leq 0$ 的情形。

我們可以驗證分數指數滿足「指數律」(留給你當作習題)，即

分數指數的指數律：當 a, b 是正實數，m, n, p, q 是整數，且 m, p 不爲 0 時，則

(1) $a^{\frac{n}{m}} \times a^{\frac{q}{p}} = a^{\frac{n}{m}+\frac{q}{p}}$

(2) $(a^{\frac{n}{m}})^{\frac{q}{p}} = a^{\frac{nq}{mp}}$

(3) $(a^{\frac{n}{m}}) \times (b^{\frac{n}{m}}) = (ab)^{\frac{n}{m}}$

課堂討論

1. 說明何爲零指數、負指數與分數指數。
2. 你有啥特別的問題嗎？

3.1.4 實數指數的建立

本單元我們要討論實數指數，也就是問：

$$2^{\sqrt{2}} \text{ 是啥意思呢？}$$

這問題不難，你的答案應該是 $2^{\sqrt{2}} \approx 2^{1.414}$。但是這時候考驗我們一下：

例題 5. 已知 $\sqrt{2} \approx 1.414$，回答下列各問題：

(1) $2^{1.414}$ 是啥意思？

(2) $2^{1.414}$ 與 $2^{\sqrt{2}}$ 哪一個數比較大？

(3) 用計算機求 $2^{1.414}$ 的近似值。

(4) 符號 $2^{\sqrt{2}}$ 表示什麼意思？

解：(1) $2^{1.414} = \sqrt[1000]{2^{1414}} = (\sqrt[1000]{2})^{1414}$。

(2) 因爲 $\sqrt{2} > 1.414$，所以 $2^{\sqrt{2}} > 2^{1.414}$。

(3) 由計算機得 $2^{1.414} \approx 2.6647$。

(4) $2^{\sqrt{2}}$ 是界在 $2^{1.414}$ 與 $2^{1.415}$ 之間的數，我們可以用近似的方法表示它，例如：$2^{1.414}$。如果你希望可以更近似 $2^{\sqrt{2}}$，可以增加 $\sqrt{2}$ 的近似值位數 ($\sqrt{2} \approx 1.414213562373$)，然後利用計算機幫你得到近似值。例如：$2^{\sqrt{2}} \approx 2^{1.4142} \approx 2.6651$。 ■

關於數 $2^{1.414}$，我們知道它是 $\sqrt[1000]{2}$ 的 1414 次方。雖然我們對 $\sqrt[1000]{2}$ 並不熟悉，不過我們知道：將這一個數「1000 次方」後會等於 2，事實上它是一個大於 1 的數 (爲什麼呢？)，而且

$$\sqrt[1000]{2} \approx 1.0006934，$$

是一個非常接近 1 的數 (在你預料中嗎？)。

用類似的概念，對於任意「無理數指數」，都可以用「分數指數」去「近似它」，雖然近似值得依賴計算機，並不容易求出，但是我們可以知道這些數的意思。

課堂討論

1. 已知 $\sqrt{3} \approx 1.73205$，回答下列各問題：
   (1) $2^{\sqrt{3}}$ 是啥意思？
   (2) $2^{1.732}$ 是啥意思？
   (3) $2^{1.732}$ 與 $2^{\sqrt{3}}$ 哪一個數比較大？
   (4) 如果把 $\sqrt{3}$ 看成 1.73205，你覺得 $2^{1.732}$ 與 $2^{1.7321}$ 哪一個數，比較接近 $2^{\sqrt{3}}$，爲什麼？

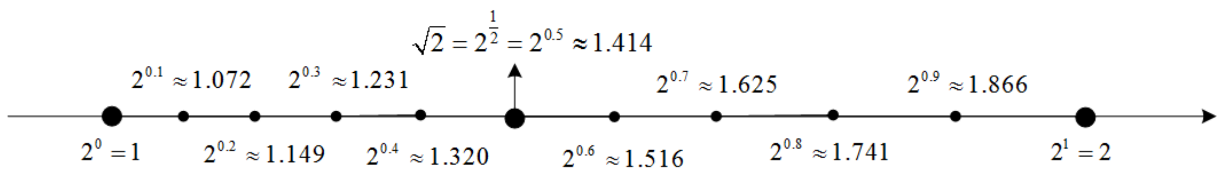
3.1.5 建立實數指數的目的

我們知道分數指數的建立，把根式乘法變簡單了，那建立實數指數的目的是甚麼呢？

如果我們以 $\dfrac{1}{2}$ 爲一個單位，那麼在數線上，$2^0, 2^{\frac{1}{2}}, 2^1$，就是位在 $1 \sim 2$ 之間的三個點 (含端點)。又如果我們以 $\dfrac{1}{10} = 0.1$ 爲一個單位，那位在 $1 \sim 2$ 之間就會有 10 個點：

$$2^0, 2^{0.1}, 2^{0.2}, \cdots, 2^{0.9}, 2^1，$$

如圖一所示：



圖一：指數型態數列分布圖

如果我們一直縮小單位，那麼 $1 \sim 2$ 之間就可以充滿很多數，這和以前我們用小數來表示實數的方式類似，如此，不僅 $1 \sim 2$ 之間可以充滿「指數型態 2^x」的數，事實上，

整個數線位在原點右邊的「正實數」，都可以寫成「指數型態 2^x」的樣子。

3.1.6 結論

對於乘法，我們有連乘積、倒數、開 n 次方根等運算，我們將這些計算都換成指數的型態，然後透過指數律的來取代這些運算，得到簡單的計算方式。這是利用「較高級的運算 — 指數律」，來取代「較基礎運算」的數學手法。

> 本節結論：
>
> (1) $a^n = a \times a \times \cdots \times a$，表示連乘積。
>
> (2) $a^0 = 1$，表示乘法的單位元素。
>
> (3) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$，表示倒數 (即是除法)。
>
> (4) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$，表示 n 次方根 (即開 n 次方根)。
>
> (5) 所有的正實數 b 都可以寫成指數型態 (例如：$b = 2^x$)。
>
> (6) 與乘法有關的運算，都可轉換成指數型態，並利用指數律加以計算。

我們利用結論作一個例題。

例題 6. 利用指數型態與指數律計算下列各式，寫出其值：

(1) $(\sqrt[3]{7})^4 \times (\sqrt[3]{7})^5$　　(2) $\sqrt{6} \times \sqrt[3]{12}$　　(3) $\left((\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}})^2\right)^6$

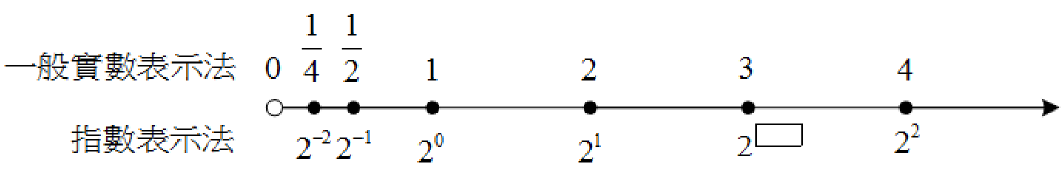
解：(1) $(\sqrt[3]{7})^4 \times (\sqrt[3]{7})^5 = 7^{\frac{4}{3}} \times 7^{\frac{5}{3}} = 7^{\frac{4}{3}+\frac{5}{3}} = 7^3 = 343$。

(2) $\sqrt{6} \times \sqrt[3]{12} = (2 \times 3)^{\frac{1}{2}} \times (2^2 \times 3)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{7}{6}} \times 3^{\frac{5}{6}}$。

(3) $\left((\dfrac{1}{(\sqrt[3]{4})})^2\right)^6 = (4^{\frac{-1}{3}})^{2\times 6} = 4^{-4} = \dfrac{1}{4^4} = \dfrac{1}{256}$。 ■

利用指數來計算，確實讓乘法的計算變得簡單多了。

關於結論 (5)，我們有圖二：正實數的指數表示法。



圖二：正實數的指數表示法

正實數有兩種表示方法：一般實數表示法和指數型態表示法。但是採用指數表示法時，我們將面臨如 3 這個數該如何用指數型態表示呢？這是我們未來要處理的問題。

3.1.7 指數應用問題

例題 **7.** 關於風力分級，國際氣象組織採用蒲福風級法 (*Beaufort scale*)，分級的公式如下：

$$V = 0.836 \times B^{\frac{3}{2}} \text{ ，}$$

其中 V 是風速 (公尺／秒)，B 是風級。
現在有一颶風，氣象組織公告其風力爲 9 級風 (稱爲烈風)，問：此颶風的風速大約是多少？

解：將 $B = 9$ 代入公式。得 $V = 0.836 \times 9^{\frac{3}{2}} = 0.836 \times (\sqrt{9})^3 = 0.836 \times 3^3 = 22.572$。
因此風速大約爲 22.6 公尺/秒。 ■

風速分級可以在氣象報告時，讓觀衆容易了解風力的威脅。這一個分級是長年使用的歸納結果。因爲涉及根式的運算，如果我們使用指數表示，分級公式顯得較爲簡潔。

例題 **8.** 根據聯合國統計，西元 1987 年世界人口總數達 50 億。假設每年人口數都增加爲原來的 r 倍 (我們稱 r 爲人口成長率)，
(1) 西元 1999 年的人口數爲多少？(以 r 表示)
(2) 已知西元 1999 年人口數已增至 60 億．求西元 2011 年的世界人口數約爲多少人？

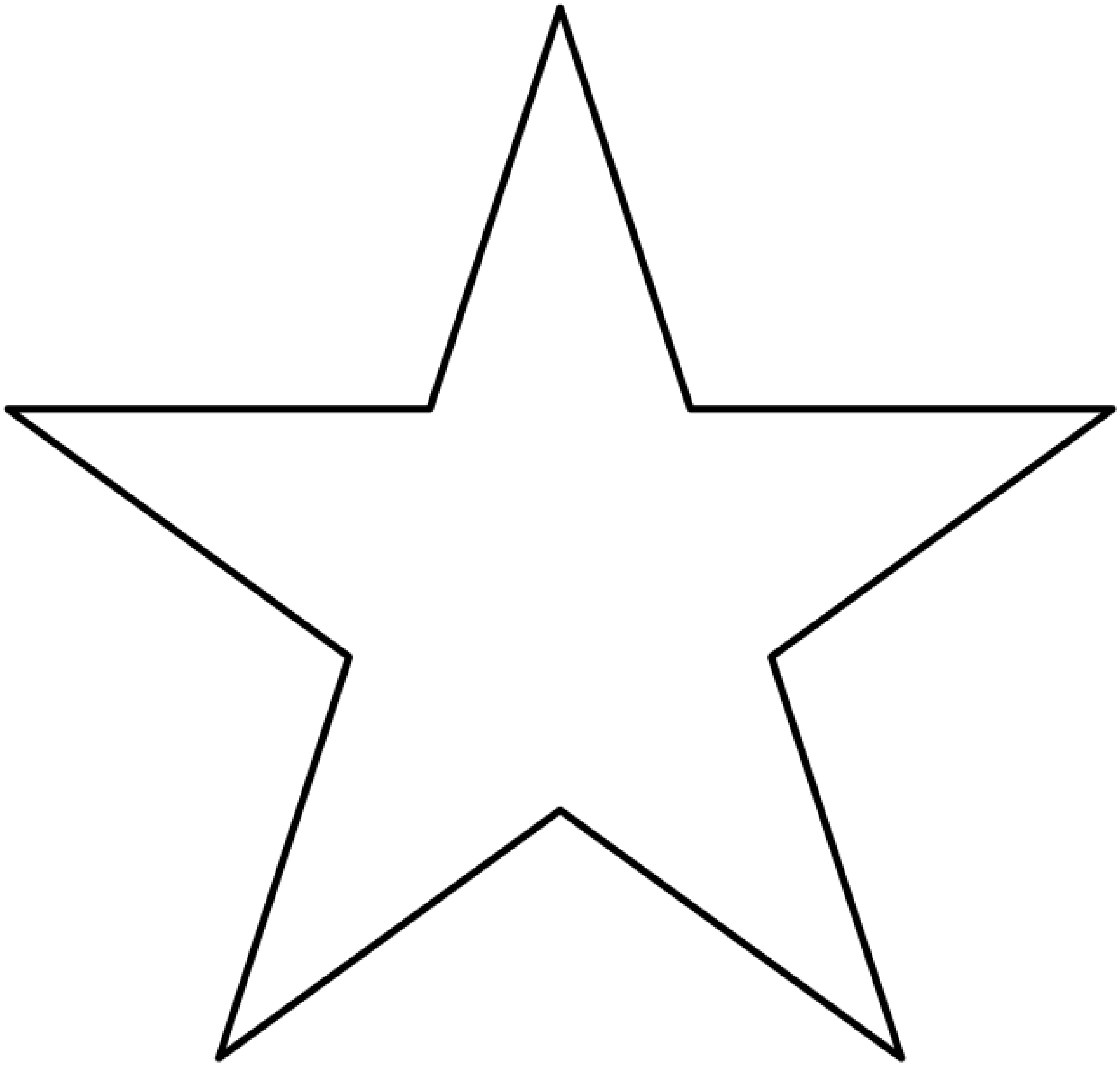
解：(1) 根據題意：從 1987 年到 1999 年，共經過 12 年，因此西元 1999 年的人口數爲 $50 \cdot r^{12}$。
(2) 因爲 1999 年的人口數爲 60 億，所以 $50 \cdot r^{12} = 60$，可得 $r^{12} = 1.2$。
從 1999 年到 2011 年，又經過 12 年，因此西元 2011 年的世界人口數爲 $60 \cdot r^{12} = 60 \times 1.2 = 72$。 ■

當人口的成長率穩定時，就是一個指數成長。在例題 8 中，我們用過往的數據來估計未來的人口數，事實上 2011 年 10 月 31 日時，世界人口數達到 70 億，和預估的情形大約相同。

利用 $r^{12} = 1.2$，可得 $r = \sqrt[12]{1.2} \approx 1.015$，我們稱之爲每年的人口平均成長率，大約爲 1.5%。事實上，2011 年因爲經濟蕭條等因素，世界人口增長率下降爲 1.1%

接下來我們看一個視覺上的統計，並做一個有趣的實驗。

視覺實驗：



例題 **9.** 統計學家克利夫蘭詳細研究人體的眼睛後發現：眼睛看到的圖形面積與此圖形實際面積的 0.7 次方成正比。今觀察地圖上大小兩國，感覺大國面積是小國面積的 128 倍，那麼實際上大國面積是小國面積的幾倍？

解：設實際上大國面積是小國面積的 a 倍。

則根據題意，可知感覺上大國面積是小國面積的 $a^{0.7}$ 倍，且 $a^{0.7} = 128 = 2^7$。

因為 $a^{0.7} = (a^{0.1})^7 = 2^7$，所以 $a^{0.1} = 2 \Rightarrow (a^{0.1})^{10} = 2^{10} \Rightarrow a = 1024$。

因此實際上大國面積是小國面積的 1024 倍。 ■

例題 9 是一個很有意思的問題，不過並不容易感覺到統計學家說的 0.7 次方是啥意思，不過對照上面的視覺實驗，瞭解統計學家的研究眞是有趣。

底下我們看一個常見的化學名詞：$\boxed{\text{半衰期}}$。

某些放射性元素，經過一段時間之後，會衰變成其他的元素。如果經過時間 t，放射性元素的質量剩下原來的一半，那麼我們稱 t 爲此元素的半衰期。

例題 **10.** 已知放射性元素碘-131 的半衰期爲 8 日。若現在有碘-131 共 128 公克，試問：經過多少天後，碘-131 剩下的質量低於 20 公克？

解：根據題意，每經過 8 日，質量會變成原來的 $\frac{1}{2}$。

計算 $\frac{20}{128}=\frac{5}{32}$，因爲 $(\frac{1}{2})^3=\frac{4}{32}<\frac{5}{32}<\frac{8}{32}=(\frac{1}{2})^2$，

所以要經過 3 天後，剩下的質量才會低於 20 公克。 ■

半衰期還可以用在藥物使用上。當病人食用每種藥物，經過 t 小時之後，血液中的藥物濃度剩下原濃度的一半，我們稱此藥物的半衰期爲 t 小時。

例題 **11.** 實驗室培養細菌數，假設在環境適當時，細菌數每經過 1 日後會增加 a 倍 (即變成原來的 $a+1$ 倍)。

現已知 3 日後的細菌數爲 10^6 個，$4\frac{1}{2}$ 日後其細菌數爲 8×10^6 個，求 a 的值。

解：因爲 3 日後到 $4\frac{1}{2}$ 日後共經過 3 個半日，所以可設每經過半日後細菌數會增加爲 x 倍，即 $a+1=x^2$ 。

根據題意，可知 $\frac{8\times10^6}{10^6}=x^3$，即 $x^3=8$，解得 $x=2$，

因此 $a+1=2^2=4$，即 $a=3$。 ■

和半衰期類似，生物的成長或細菌數的增加，每經過一定的時間 t，會增加爲原來的 2 倍，我們可稱其爲「 倍增期 」。例題 11 中，倍增期爲「 半日 」。這種成長的情形，我們稱之爲指數成長，是自然界中常見的現象。

3.1.8 數學問題演練

問題 1. 設 $a>0$，且 $a+a^{-1}=3$，求下列各式的值：

(1) a^2+a^{-2} (2) a^3+a^{-3} (3) $a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{-1}{2}}$

解：(1) 因爲 $(a+a^{-1})^2=a^2+2a\cdot a^{-1}+a^{-2}=a^2+a^{-2}+2$，

所以 $a^2+a^{-2}=(a+a^{-1})^2-2=3^2-2=7$。

(2) 因爲 $(a+a^{-1})^3=a^3+3a^2\cdot a^{-1}+3a\cdot a^{-2}+a^{-3}=a^3+a^{-3}+3(a+a^{-1})$，

所以 $a^3+a^{-3}=(a+a^{-1})^3-3(a+a^{-1})=3^3-3\times 3=18$。

(3) 因爲 $(a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{-1}{2}})^2=a+a^{-1}+2=3+5=5$，

所以 $a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{-1}{2}}=\sqrt{5}$ ($-\sqrt{5}$ 不合)。 ■

問題 2. 設 $a>0$，且 $a^{3x}=5$，求 $\dfrac{a^{5x}+a^{-x}}{a^{2x}-a^{-4x}}$ 的值：

解：$\dfrac{a^{5x}+a^{-x}}{a^{2x}-a^{-4x}}=\dfrac{(a^{5x}+a^{-x})\cdot a^x}{(a^{2x}-a^{-4x})\cdot a^x}=\dfrac{a^{6x}+1}{a^{3x}-a^{-3x}}=\dfrac{5^2+1}{5-5^{-1}}=\dfrac{65}{12}$ ■

問題 3. 設 x,y 爲實數，且 $53^x=9,477^y=243$，求 $\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{y}$ 的值：

解：要想辦法出現 $\dfrac{2}{x}$ 與 $\dfrac{5}{y}$。因此，$53^x=9,477^y=243\Rightarrow 53=9^{\frac{1}{x}},477=243^{\frac{1}{y}}$。

再改一下：$53=(3^2)^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{2}{x}},477=(3^5)^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{5}{y}}$，將兩式相除，可得

$\dfrac{53}{477}=3^{\frac{2}{x}-\frac{5}{y}}\Rightarrow\dfrac{1}{9}=3^{-2}=3^{\frac{2}{x}-\frac{5}{y}}\Rightarrow\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{y}=-2$。 ■

問題 4. 估算 $15^{0.75}$ 界在哪兩個連續整數之間？

(1) 6 與 7 (2) 7 與 8 (3) 8 與 9 (4) 9 與 10 (5) 10 與 11

問題 **5.** 下列哪一個選項無意義？

(1) $(-3)^0$ (2) $(-3)^{-2}$ (3) $(-3)^{\sqrt{2}}$ (4) $3^{\sqrt{2}}$ (5) $3^{0.3}$

問題 **6.** 下列哪些選項是正確的？

(1) $\sqrt{(-3)^2}=3$ (2) $(-\sqrt{3})^2=-3$ (3) $\sqrt{(-2)^3}=-\sqrt{2^3}$ (4) $\sqrt[3]{(-2)^4}=-\sqrt[3]{2^4}$

(5) $\sqrt[3]{(-2)^5}=-\sqrt[3]{2^5}$

問題 **7.** 下列選項何者錯誤？

(1) $2^{\sqrt{2}}$ 無意義 (2) 若 $16^x=8$，則 $x=\dfrac{8}{16}$ (3) $(\sqrt[3]{3})^{\frac{9}{2}}=3\sqrt{3}$ (4) $5\cdot 2^{10}=10^{10}$

(5) $100^{10}>10^{100}$

問題 **8.** 求下列各式的值：

(1) $3^3\times 3^{-4}$ (2) $(25)^0$ (3) $\dfrac{(\sqrt{5})^{-2}}{(\sqrt{5})^{-4}}$

(4) $\sqrt[5]{2^{20}}\times\sqrt{\sqrt{2^{12}}}$ (5) $\dfrac{10^{-1.1}\times 10^{0.9}}{10^{-1.2}}$ (6) $64\times 8^{\frac{-2}{3}}$

(7) $(\sqrt{5}-2)^3\times(\sqrt{5}+2)^3$
