3.2 對數

在上一節中，我們知道所有的正實數可以寫成指數型態，例如 2^x 的樣子，但是，立即面臨一個簡單又困難的問題：

3 是 2 的幾次方呢？

我們實在找不到一個適當的表示方法，於是得創造一個符號來幫忙，那就是「對數」。

3.2.1 新符號：對數

如果以 2 爲底數，到底 2 的幾次方等於 3 呢？

顯然我們沒有好答案，也就是說：這是一個我們不知道的數，而且沒有簡單的方式可以找到這個數，甚且它應該是一個「無理數次方」。

那怎麼辦呢？

於是數學家想一個辦法：創造一個新的符號來表示這一個數，即

$$3 = 2^{\log_2 3}\text{ 。}$$

$\boxed{\text{新符號 } \log_2 3}$ 就是指數 (次方)，我們將其讀爲「3 以 2 爲底數，所對應的指數爲 $\log_2 3$」。

$\underset{\text{由後往前讀}}{\xleftarrow{\log_2 3}}$ 3 以 2 為底數「所對應的指數」$\log_2 3$

因此符號 log 的本質是指數，因爲是「所對應的指數」，所以簡稱爲「對數」。於是，

若 $x = \log_a b$，則 $b = a^x$，符號 $\log_a b$ 中，a 稱爲底數，b 稱爲眞數。

因爲 $b = a^x$，所以 $b > 0$。

單單看上面的說明沒有辦法熟練，我們多舉一些例子：

例題 1.

(1) $3^{\log_3 4} = 4$	(2) $5 = 2^{\log_2 5}$	(3) $2016 = 10^{\log_{10} 2016}$
(4) $7^{\log_7 1} = 1 = 7^0$	(5) $5^{\log_5 5} = 5 = 5^1$	(6) $\frac{1}{2} = 3^{\log_3 \frac{1}{2}}$
(7) $0.3 = 10^{\log_{10} 0.3}$	(8) $2^{\log_2 4} = 4 = 2^2$	(9) $3^{\log_3 \frac{1}{9}} = \frac{1}{9} = 3^{-2}$

把上面的例子自己書寫一次，看看是否清楚。

從例題 1 可得：$\log_7 1 = 0, \log_5 5 = 1, \log_2 4 = 2, \log_3 \dfrac{1}{9} = -2$，並可知對數不一定是無理數，不過，大部分的對數是寫不出其眞正值的，只好用符號表示。

關於對數 $\log_a b$，我們再做一些討論：

(1) $\boxed{\text{不使用 } \log_{10}(-5) \text{ 這樣的符號}}$。因爲這一個符號表示 $-5 = 10^{\log_{10}(-5)}$，當底數爲 10 時，並不會得到 -5 的值，因此 $\log_a b$ 中的眞數 b 必須大於 0。

(2) $\boxed{\text{不使用 } \log_1 5 \text{ 這樣的符號}}$。因爲這一個符號表示 $5 = 1^{\log_1 5}$，事實上 1 的任意次方都不會等於 5。當然，$\log_1 1$ 也很怪，因爲 1 任意次方都是 1，所以 $\log_1 1$ 可以是任意實數，因此 $\log_a b$ 中的底數 a 必須大於 0 且不要等於 1。

> 關於對數符號 $\log_a b$：
>
> (1) a 稱爲底數，須滿足 $a > 0$ 且 $a \neq 1$。
>
> (2) b 稱爲眞數，須滿足 $b > 0$。

課堂討論

1. 用對數符號表示出下列各式中之 x 的值：

   (1) $3^x = 2$ (2) $10^x = 7$ (3) $(\sqrt{2})^x = 3$

2. 求出右列各對數的值：$\log_2 2,\ \log_2 4,\ \log_2 256,\ \log_2 \dfrac{1}{2},\ \log_2 \dfrac{1}{16}$。

3. 求出右列各對數的值：$\log_2 \sqrt{2},\ \log_2 4\sqrt{2},\ \log_2 \sqrt[3]{4},\ \log_2 1,\ \log_2 \dfrac{1}{\sqrt{2}}$。

4. 關於對數 $\log_x(4 - x^2)$，如果此符號有意義，那麼 x 的範圍爲何？

5. 試比較 $1.5,\ \log_2 3,\ 2$ 三數的大小關係。

了解對數這一個符號後，我們接著要討論對數的運算規則。

3.2.2 對數律

關於對數的運算法則，我們稱之爲 **對數律** 。底下先用例子做一次說明，再整理成表，節末再證明一次。

例題 2.

(1) 計算 $10^{\log_{10}6}=6=2\times 3=10^{\log_{10}2}\times 10^{\log_{10}3}=10^{\log_{10}2+\log_{10}3}$，

因此，$\log_{10}6=\log_{10}(2\times 3)=\log_{10}2+\log_{10}3$。(眞數做乘法時，對數相加)

(2) 計算 $10^{\log_{10}\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}=\frac{10^{\log_{10}2}}{10^{\log_{10}3}}=10^{\log_{10}2-\log_{10}3}$，

因此，$\log_{10}\frac{2}{3}=\log_{10}2-\log_{10}3$。(眞數做除法時，對數相減)

(3) 計算 $10^{3\times\log_{10}2}=(10^{\log_{10}2})^3=2^3=8=10^{\log_{10}8}=10^{\log_{10}2^3}$，

因此，$3\times\log_{10}2=\log_{10}2^3$。(對數 n 倍，眞數 n 次方)

(4) 因爲 $5^{\log_5 3\times\log_3 2}=(5^{\log_5 3})^{\log_3 2}=3^{\log_3 2}=2=5^{\log_5 2}$，

所以 $\log_5 3\times\log_3 2=\log_5 2$。

利用下面空白處，把上面的例子寫一次，看看是否清楚其意義。

上面爲部分的對數律，先整理一下：

> 對數律第一部分：
>
> (1) $\log_a(b \times c) = \log_a b + \log_a c$ —— 眞數相乘，對數相加。(對數就是指數的意思)
>
> (2) $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$ —— 眞數相除，對數相減。(對數就是指數的意思)
>
> (3) $\log_a(b^n) = n(\log_a b)$ —— 眞數 n 次方，對數 n 倍。
>
> (4) $\log_a b \times \log_b c = \log_a c$

利用上面的對數律，我們做幾個練習：

例題 3. 求下列各式的值：

(1) $\log_6 \sqrt{2} + \log_6 18\sqrt{2}$　　(2) $\log_3 54 - 2\log_3 2 + \log_3 6$

(3) $\log_2 3 \times \log_3 5 \times \log_5 8$　　(4) $\log_2 5 \times \log_5 2$

解：(1) $\log_6 \sqrt{2} + \log_6 18\sqrt{2} = \log_6(\sqrt{2} \times 18\sqrt{2}) = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2\log_6 6 = 2$。

(2) $\log_3 54 - 2\log_3 2 + \log_3 6 = \log_3 54 - \log_3 2^2 + \log_3 6 = \log_3(54 \times \frac{1}{4} \times 6)$

$= \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4\log_3 3 = 4$。

(3) $\log_2 3 \times \log_3 5 \times \log_5 8 = \log_2 8 = 3$

(4) $\log_2 5 \times \log_5 2 = \log_2 2 = 1$。 ■

由 $\log_2 5 \times \log_5 2 = 1$，可知 $\log_a b$ 和 $\log_b a$ 互爲倒數，這是很有趣的事情。

上面是基礎的對數律，底下我們再看一些變化的對數律。

例題 4.

(1) 計算 $4^{\frac{1}{2} \times \log_2 3} = (4^{\frac{1}{2}})^{\log_2 3} = 2^{\log_2 3} = 3 = 4^{\log_4 3} = 4^{\log_{(2^2)} 3}$。

因此，$\frac{1}{2}\log_2 3 = \log_{2^2} 3$，也因此 $\frac{3}{2}\log_2 3 = \log_{(2^2)} 3^3$。

(2) 計算 $\log_2 3 = \log_{(5^{\log_5 2})} 5^{\log_5 3} = \frac{\log_5 3}{\log_5 2}\log_5 5 = \frac{\log_5 3}{\log_5 2}$ (使用 (1) 的結論)，

因此，$\log_2 3 = \frac{\log_5 3}{\log_5 2}$，這是有名的換底公式。 ■

因此，整理一下進階的對數律：

> 對數律的進階部分：
>
> (1) $\dfrac{m}{n}\log_a b = \log_{a^n} b^m$
>
> (2) 換底公式：$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

利用所有的對數律，我們再做幾個練習：

例題 **5.** 求下列各式的值：

(1) $\log_4 \dfrac{28}{15} - 2\log_4 \dfrac{3}{14} + 6\log_{16} \dfrac{6}{7} - 2\log_{16} \dfrac{2}{5}$

(2) $3^{\log_9 25} + 8^{\log_2 3}$

(3) $(\log_2 5 + \log_4 0.2) \times (\log_5 2 + \log_{25} 0.5)$

(4) $\dfrac{1}{\log_2 6} + \dfrac{1}{\log_{18} 6}$

關於換底公式有兩種型態：$\boxed{\text{指數的換底公式}}$與$\boxed{\text{對數的換底公式}}$。

- $b = a^{\log_a b}$：例如：$3 = 10^{\log_{10} 3}$。(左邊底數爲 3，右邊底數爲 10)

  這其實是對數符號的定義，它讓我們可以將任意正實數，換成某一個底數的指數型態。如果我們將所有正實數，換成以 10 爲底數的指數型態，那就是常用的「十進位制」。這也是將來我們想要的型態。

- $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$：例如：$\log_2 3 = \dfrac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$。

  當我們把所有的對數換成相同的底數時，就可以用已知的對數值去計算未知的對數值。例如用 $\log_{10} 3, \log_{10} 2$ 去計算 $\log_2 3$ 的值，這在使用計算機或查表時，極爲便利。底數爲 10 的對數值 $\log_{10} a$ 稱爲$\boxed{\text{常用對數}}$，是本章後面課程中使用的對數表示法。

對數律總整理：(關於對數律的證明，我們在本節末會再一次地證明。)

> (1) 指數的換底公式：$b = a^{\log_a b}$ (b 換成 a)。
> (2) 對數的換底公式：$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (a 換成 c)。
> (3) 化乘爲加：$\log_a(b \times c) = \log_a b + \log_a c$ 。
> (4) 化除爲減：$\log_a(\dfrac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$。
> (5) 提出指數：$\log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n} \log_a b$。
> (6) $\log_a b \times \log_b c \times \log_c d = \log_a d$，$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ 。

例題 **6.** 設 $a = \log_{10} 2, b = \log_{10} 3$，試用 a, b 表示下列各式：

(1) $\log_4 6$　(2) $\log_3 5$　(3) $\log_3 180$

解：(1) $\log_4 6 = \dfrac{\log_{10} 6}{\log_{10} 4} = \dfrac{\log_{10} 2 + \log_{10} 3}{\log_{10} 2 + \log_{10} 2} = \dfrac{a+b}{2a}$。

(2) $\log_3 5 = \dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} = \dfrac{1 - \log_{10} 2}{\log_{10} 3} = \dfrac{1-a}{b}$。

(3) $\log_3 180 = \dfrac{\log_{10} 180}{\log_{10} 3} = \dfrac{\log_{10} 2 + \log_{10} 3^2 + \log_{10} 10}{\log_{10} 3} = \dfrac{a+2b+1}{b}$。 ■

常用對數的底數 10 可以被省略，因此當你看到 $\log 3$ 時，就是 $\log_{10} 3$ 的意思。

例題 **7.** 求下列各式的值：

(1) $\log 2 - \log \frac{5}{2} + 2\log\sqrt{125}$ (2) $\log 2 + \log(1+\frac{1}{2}) + \log(1+\frac{1}{3}) + \cdots + \log(1+\frac{1}{9})$

3.2.3 對數的近似值

在前面的課程中，我們認識了對數符號，也學會了對數的運算性質。但是，對於如 $\log_{10} 2$ 這樣符號的值究竟爲何，還是沒有概念。

我們先提供一些近似值，然後再說明怎樣找到這些近似值的。幾個常用的近似值 (可以記一下)：

$$\log_{10} 2 \approx 0.3010, \log_{10} 3 \approx 0.4771, \log_{10} 7 \approx 0.8451。$$

然後利用這些近似值，我們又可以得到

- $\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2 = 2 \times \log_{10} 2 \approx 0.3010 \times 2 = 0.6020$，
- $\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = 1 - \log_{10} 2 \approx 0.6990$，
- $\log_{10} 6 = \log_{10}(2 \times 3) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 \approx 0.7781$，
- $\log_{10} 8 = \log_{10}(2^3) = 3\log_{10} 2 \approx 0.9030$，
- $\log_{10} 9 = \log_{10}(3^2) = 2\log_{10} 3 \approx 0.9542$。

有了近似值，我們再將這些式子作一些改變，可得：$\log_{10} 2 \approx 0.301 \Rightarrow 2 \approx 10^{0.301}$，並同理得：

$2 \approx 10^{0.301}$	$3 \approx 10^{0.4771}$	$4 \approx 10^{0.602}$	$5 \approx 10^{0.699}$
$6 \approx 10^{0.778}$	$7 \approx 10^{0.8451}$	$8 \approx 10^{0.903}$	$9 \approx 10^{0.9542}$

雖然你第一次看到時會有點不習慣，不過，把正實數變成 10^x 的指數型態，是很漂亮的表示方法，同時在作乘法時，它將變的非常有用。

例題 **8.** 把下列的數都變成 10^x 的指數型態：

$2,\ 3,\ 7,\ 12,\ 20,\ 2.5,\ 15,\ 42,\ 105,\ 0.125,\ 0.008$

3.2.4 對數應用問題

例題 **9.** 關於風力分級，國際氣象組織採用蒲福風級法 (*Beaufort scale*)，分級的公式如下：

$$V = 0.836 \times B^{\frac{3}{2}} \quad ,$$

其中 V 是風速 (公尺／秒)，B 是風級。

現在有一颶風，氣象組織測得的風速為 20 公尺／秒，則其風力應該公告為幾級風？

例題 **10.** 根據聯合國統計，西元 1987 年世界人口總數達 50 億。假設每年人口數都增加爲原來的 r 倍 (我們稱 $r-1$ 爲人口的平均成長率)，且西元 1999 年人口數已增至 60 億，求 r 的近似值。($\log 1.01 \approx 0.0043, \log 1.02 \approx 0.0086, \log 1.03 \approx 0.0128$)

例題 **11.** 統計學家克利夫蘭詳細研究人體的眼睛後發現：眼睛看到的圖形面積與此圖形實際面積的 0.7 次方成正比。今觀察地圖上大小兩國，如果實際上大國面積是小國面積的 200 倍，那麼視覺上大國面積是小國面積的多少倍？

例題 **12.** 已知放射性元素碘-131 的半衰期爲 8 日。若現在有碘-131 共 128 公克，試問：經過多少天後，碘-131 剩下的質量低於 20 公克？

例題 **13.** 實驗室培養細菌數，假設在環境適當時，細菌數每經過 1 日後會增加爲原來的 3 倍。已知現在的細菌數爲 10^6 個，求多少日後其細菌數爲 10^{10} 個。

例題 **14.** 聲音的強度是用每平方公尺多少瓦特 (W/m^2) 來衡量，一般人能感覺出聲音的最小強度爲 $I_0 = 10^{-12}(W/m^2)$；當測得的聲音強度爲 $I(W/m^2)$ 時，所產生的噪分貝數 d 爲 $d(I) = 10 \cdot \log \dfrac{I}{I_0}$，問：

(1) 一隻蚊子振動翅膀測得的聲音強度爲 $10^{-12}(W/m^2)$ ，求其產生的噪音分貝數？

(2) 汽車製造廠測試發現，某新車以每小時 60 公里速度行駛時，測得的聲音強度爲 $10^{-4}(W/m^2)$ ，試問此聲音強度產生的噪音爲多少分貝？

(3) 棒球比賽場中，若一支瓦斯汽笛獨鳴，測得的噪音爲 70 分貝，則百支瓦斯汽笛同時同地合鳴，被測得的噪音大約爲多少分貝？

注意一下分貝的定義方法，它是利用聲音強度互相比較的方式，來定義聲音的強弱指數。因爲 $I_0 = 10^{-12}(W/m^2)$ 是能感受到的最低強度，所以以此爲標準。不過，因爲相除之後的數值太大，所以我們取對數 (就是取指數的意思)，免得數值太大，但取完對數又太小，只好再乘以 10，這樣的數值讓我們在使用時，有較大的便利性。

例題 **15.** 挑戰一下：2016^{2016} 是幾位數？

例題 **16.** 目前國際上使用芮氏規模來表示地震的強度，設 E（單位：爾格）為地震芮氏規模 M 時所釋放出來的能量，其中 M 與 E 的關係如下：

$$\log_{10} E = 11.8 + 1.5M。$$

(1) 已知集集大地震的芮氏規模為 7.3，試問其震央所釋放的能量為多少爾格？

(2) 當地震的芮氏規模增加 2 時，其釋放的能量是原來的幾倍？

課堂討論

考你一下：到底 M 與 E 的關係是如何定義出來的？

$\boxed{\text{對數律證明}}$：

(1) 指數的換底公式：$b=a^{\log_a b}$，就是定義。

(3) 化乘為加：$\log_a(b\times c)=\log_a b+\log_a c$。

證明：因為 $b=a^{\log_a b}, c=a^{\log_a c}$，所以 $b\times c=a^{\log_a b+\log_a c}$，又 $b\times c=a^{\log_a(b\times c)}$，

因此 $\log_a(b\times c)=\log_a b+\log_a c$。

(4) 化除為減：$\log_a(\frac{b}{c})=\log_a b-\log_a c$。

證明：因為 $b=a^{\log_a b}, c=a^{\log_a c}$，所以 $\frac{b}{c}=a^{\log_a b-\log_a c}$，又 $\frac{b}{c}=a^{\log_a(\frac{b}{c})}$，

因此 $\log_a(\frac{b}{c})=\log_a b-\log_a c$。

(5) 提出指數：$\log_{a^n} b^m=\frac{m}{n}\log_a b$。

證明：因為 $b=a^{\log_a b}$，所以 $b^m=(a^m)^{\log_a b}$，並得 $b^m=(a^n)^{\frac{m}{n}\log_a b}$。

又 $b^m=(a^n)^{\log_{a^n} b^m}$，因此 $\log_{a^n} b^m=\frac{m}{n}\log_a b$。

(2) 對數的換底公式：$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$。

證明：$\log_a b=\log_{(\log_c a)}(c^{\log_c b})=\frac{\log_c b}{\log_c a}\log_c c=\frac{\log_c b}{\log_c a}$。

(6) $\log_a b\times\log_b c\times\log_c d=\log_a d$，$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$。

證明：因為 $d=c^{\log_c d}=(b^{\log_b c})^{\log_c d}=(a^{\log_a b})^{\log_b c\log_c d}$，又 $d=a^{\log_a d}$，

所以 $\log_a b\times\log_b c\times\log_c d=\log_a d$。

因為 $\log_a b\times\log_b a=\log_a a=1$，所以 $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$。