$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1}$

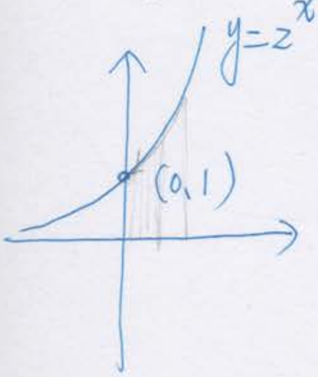
① $\sqrt[n]{1}\le\sqrt[n]{2}$ 显然

② $(1+x)^n = 1+nx+C_n^2x^2+\cdots\cdots$

若取 $x>0 \Rightarrow (1+x)^n > 1+nx$

$\Rightarrow 1+x > \sqrt[n]{1+nx}$

再取 $x=\frac{1}{n}$ (让 $1+nx=2$)



则 $1+\frac{1}{n} > \sqrt[n]{2} > 1$

1

$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}=1}$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ 仿上法：取 $x>0$, $(1+x)^n > 1+\frac{n(n-1)}{2}x^2$

$\Rightarrow 1+x > \sqrt[n]{1+\frac{n(n-1)}{2}x^2}$

令 $1+\frac{n(n-1)}{2}x^2=n \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2}x^2=n-1$

$\Rightarrow x^2=\frac{2}{n} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{2}{n}}$

可得 $1<\sqrt[n]{n}<1+\sqrt{\frac{2}{n}}$

1

推论：$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k}=1}$ 但 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n}=\lim_{n\to\infty}n=\infty$

Q: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=$ ______

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$

$\Downarrow$

收斂？

$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdots(n-3)(n-2)(n-1)\cdot n \le \left(\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{n}{2}\right)^{n}$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} \le \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2} = \infty$

$\sqrt[n]{n^{\frac{n}{2}}} \le \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2}\right)^{n}} \le \frac{n}{2}$

$\sqrt[n]{n^{\frac{n}{2}}} = \sqrt{n}$

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$.

想法：$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$

$= C_0^n + C_1^n\frac{1}{n} + C_2^n\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots$

$= 1+1+\frac{n(n-1)}{2\cdot n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3\cdot n^3}+\cdots\cdots$

$\le 1+1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots$

$= 1+1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots\cdots = 3$

故 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\le 3$. 不會太大！

$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1<\left(1+\frac{1}{2}\right)^2<\left(1+\frac{1}{3}\right)^3<\cdots$ 會不會越來越大！

$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ ？

$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} \ge \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}$

$1+\frac{1}{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1} \ge \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}$

$\Longrightarrow \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \ge \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$

哇！算幾不等式

因為收斂.
所以其極限值
有意思！

指數函數 $f(x)=a^x,\ a>0,\ a\neq 1$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

$$=a^x\cdot \underline{f'(0)}$$

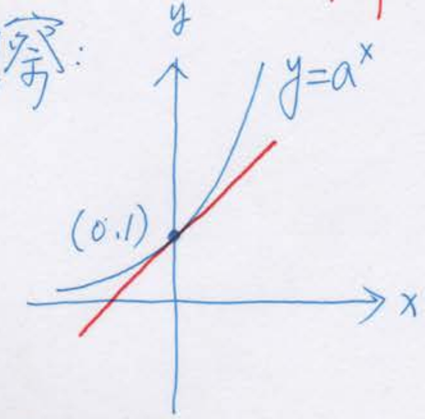
$\Downarrow$

在 $(0,1)$ 的切線斜率.

$h\to 0$, 不易處理.

用 $\frac{1}{n}$ 來幫忙!

$\Leftarrow$ 觀察:



$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=k.$$

$\Longrightarrow$ $a^{\frac{1}{n}}-1$ 和 $k\frac{1}{n}$ 都很小

但差不多相同.

$a^{\frac{1}{n}}$ 可視為 $1+k\frac{1}{n}$ $\Longrightarrow$ $a^{\frac{1}{n}}=1+k\frac{1}{n}$

$\Longrightarrow$ $a=\left(1+k\frac{1}{n}\right)^n$.

當 $n\to\infty$ 時, 故 $a=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n$.

因為 $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k}\cdot k}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k}}\right]^k=e^k$$

所以 $a=e^k$. $k=\log_e a$. 得到 $(a^x)'=\ln a\cdot a^x$.

不錯喔!