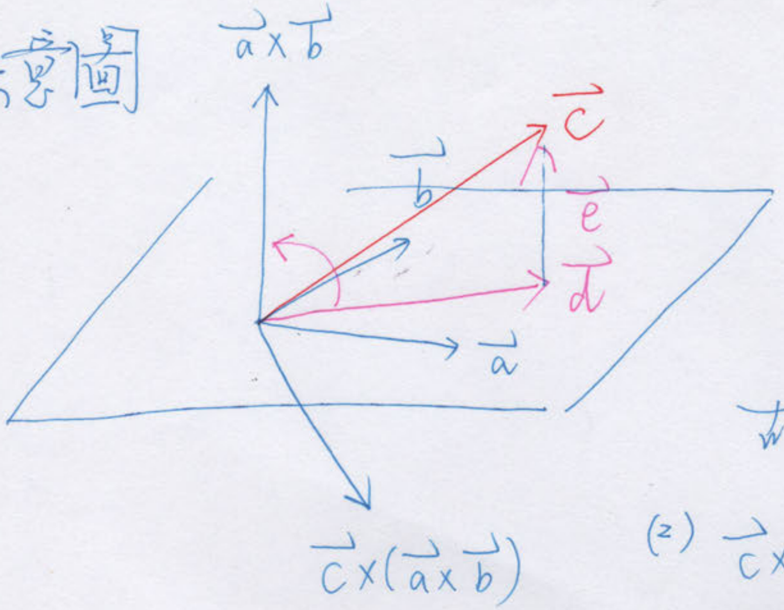
雙重外積：$\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$

示意圖



(1) 確定方向！

在 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 所張出之平面上。

故 $\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$

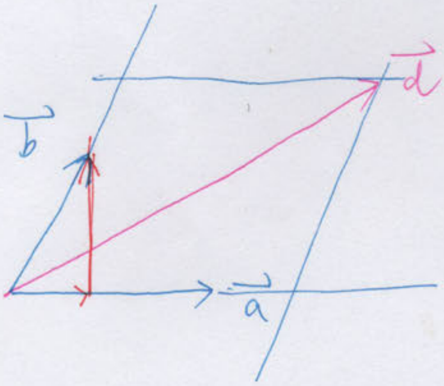
(2) $\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$

$=(\vec{d}+\vec{e})\times(\vec{a}\times\vec{b})$

$=\vec{d}\times(\vec{a}\times\vec{b})+\vec{e}\times(\vec{a}\times\vec{b})$

$=\vec{d}\times(\vec{a}\times\vec{b})+\vec{0}$ 故處理 $\vec{d}$ 即可！

(3)



$\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上之正射影：

$$\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\right)\cdot\vec{a}$$

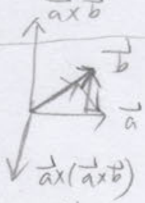
故 $\vec{b}=\left(\vec{b}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a}\right)+\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a}$

同理 $\vec{a}=\left(\vec{a}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\cdot\vec{b}\right)+\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\cdot\vec{b}$.

(4) $\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})$

$=k\left(\vec{b}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a}\right)$

方向：



$\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})$ 和 $\left(\vec{b}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a}\right)$ 平行

長度. $|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\theta$

平行▱

$k<0$

因右手定則.

長度是以 $\vec{a}$ 為底▱之高

故 $k=-|\vec{a}|^2$. 即 $\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})$

$=-(\vec{a}\cdot\vec{a})\left(\vec{b}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a}\right)$

$=(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}$ #

(5) $\vec{b}\times(\vec{a}\times\vec{b})=k\left(\vec{a}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\cdot\vec{b}\right)$. 由右手定则得 $k>0$

並由长度 $|\vec{b}|\cdot$ ⟷, 得 $k=|\vec{b}|^2$.

即 $\vec{b}\times(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{b}\cdot\vec{b})\left(\vec{a}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\cdot\vec{b}\right)=(\vec{b}\cdot\vec{b})\cdot\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{b}$.

(6)

$$\begin{aligned}
\vec{d}\times(\vec{a}\times\vec{b}) &= (\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{b}) \\
&= \alpha\,\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})+\beta(\vec{b}\times(\vec{a}\times\vec{b})) \\
&= (\alpha\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}-(\alpha\vec{a}\cdot\vec{a})\cdot\vec{b} \quad = \left[(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})\cdot\vec{b}\right]\cdot\vec{a}-\left[(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})\cdot\vec{a}\right]\cdot\vec{b} \\
&+ (\beta\vec{b}\cdot\vec{b})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\alpha\vec{b})\cdot\vec{b} \quad = (\vec{d}\cdot\vec{b})\cdot\vec{a}-(\vec{d}\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}.
\end{aligned}$$

故
$$\begin{aligned}
\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) &= \vec{d}\times(\vec{a}\times\vec{b}) \\
&= (\vec{d}\cdot\vec{b})\cdot\vec{a}-(\vec{d}\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=\left[(\vec{c}-\vec{e})\cdot\vec{b}\right]\vec{a}-\left[(\vec{c}-\vec{e})\cdot\vec{a}\right]\cdot\vec{b} \\
&= \left[(\vec{c}\cdot\vec{b})\cdot\vec{a}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}\right]+0 \ \#
\end{aligned}$$

Q: 几何上, 何时有用?

物理上,