數列的夾擠定理

bee[*]

105.2.18 ∼ 105.2.18

一個定理總有存在的理由，為何需要夾擠定理呢？

1 夾擠定理

夾擠定理，又稱爲「三明治定理」。敍述如下：

定理：設 $\langle a_n\rangle, \langle b_n\rangle, \langle c_n\rangle$ 是三個數列。若 $a_n < c_n < b_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$，
則數列 $\langle c_n\rangle$ 是一個收斂數列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha$。

爲何我們需要夾擠定理呢？它可以幫我們處理那些問題？

2 一個例子

例子：證明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{(1.1)^n} = 0$。

這顯然是一個很困難的問題，因爲 n 會越來越大，$(1.1)^n$ 也會慢慢變大，由兩個都變大的數列相除，其極限是很難預測的。那我們該如何證明此數列 $\left\langle \dfrac{n}{(1.1)^n} \right\rangle$ 收斂，又其收斂值爲 0 呢？

利用二項式定理將 $(1.1)^n = (1+0.1)^n$ 展開，得

$$(1.1)^n = (1+0.1)^n = C_0^n + C_1^n \cdot 0.1 + \underline{C_2^n \cdot (0.1)^2} + \cdots + C_n^n \cdot (0.1)^n > C_2^n \cdot (0.1)^2,$$

因此，

$$0 < \frac{n}{(1.1)^n} < \frac{n}{C_2^n \cdot 0.01} = \frac{100n}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{200}{n-1}。$$

因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{200}{n-1} = 0$，所以利用夾擠定理可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1.1)^n} = 0。$$

[*]bee 美麗之家: http:/www2.chsh.chc.edu.tw/bee

3　歷史例子

數學家使用數列來幫忙的目的是希望可以「逼近我們想要的值」，底下我們看兩個例子：

一、圓周長與圓面積：

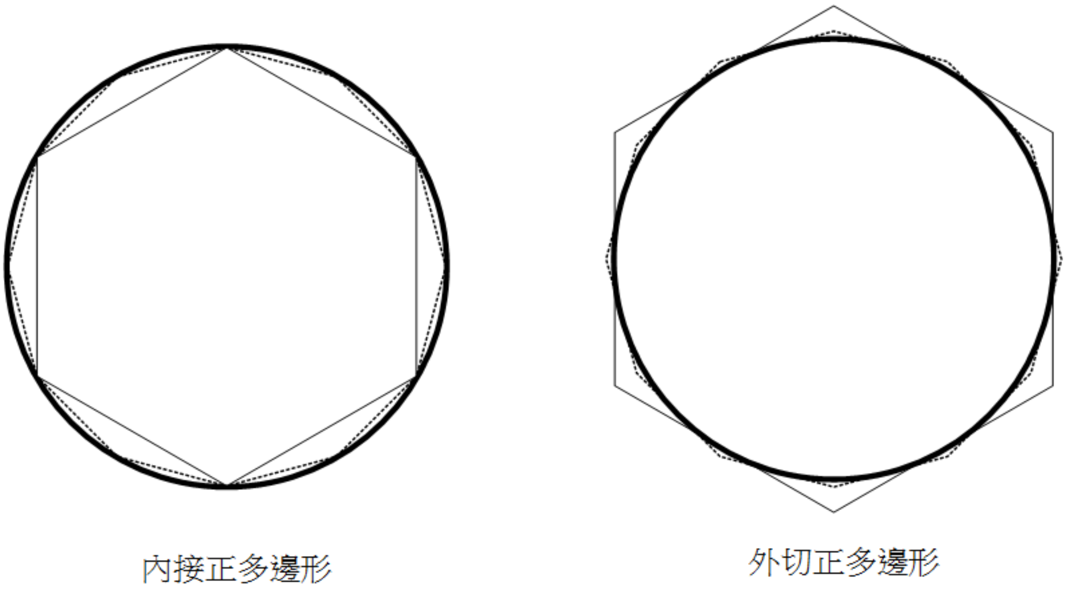

圖 1：夾擠定理看圓周長與圓面積

數學家利用「正多邊形來逼近圓」，進而得到圓周長和圓面積的值。底下我們來看看圓周長的情形：

我們從內接正 6 邊形開始，其周長爲 $6 \cdot 2 \cdot \sin(\frac{\pi}{6})$，然後增加到內接正 12 邊形，其周長爲 $2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot \sin(\frac{\pi}{6 \cdot 2})$ ，以此類推，可得圓周長大約爲

$$2^{n-1} \cdot 6 \cdot 2 \cdot \sin(\frac{\pi}{6 \cdot 2^{n-1}}) = 12 \cdot 2^{n-1} \cdot \sin(\frac{\pi}{6 \cdot 2^{n-1}})。$$

因爲內接正 n 邊形的周長隨著邊數變多，其長度越來越大，但其值是小於圓周長的，所以此數列 $12 \cdot 2^{n-1} \cdot \sin(\frac{\pi}{6 \cdot 2^{n-1}})$ 是一個收斂數列，看起來其值應該爲圓周長。

同理我們也可以用外切正 6 邊形著手，其周長爲 $6 \cdot 2 \cdot \tan(\frac{\pi}{6})$，然後增加到內接正 12 邊形，其周長爲 $2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot \tan(\frac{\pi}{6 \cdot 2})$ ，以此類推，可得圓周長大約爲

$$2^{n-1} \cdot 6 \cdot 2 \cdot \tan(\frac{\pi}{6 \cdot 2^{n-1}}) = 12 \cdot 2^{n-1} \cdot \tan(\frac{\pi}{6 \cdot 2^{n-1}})。$$

因爲外切正 n 邊形的周長是隨著邊數變多，其長度越來越小，但其值是大於圓周長的，所以此數列 $12 \cdot 2^{n-1} \cdot \tan(\frac{\pi}{6 \cdot 2^{n-1}})$ 是一個收斂數列，看起來其值應該爲圓周長。

於是利用夾擠定理，如果我們可以得到兩個數列的收斂值，那麼，圓周長就被我們掌握了。

不過，顯然這兩個數列的收斂值都很難計算，阿基米德與祖沖之在這一個議題上都曾下過很多工夫，做了許多計算，才得到不錯的近似值，而當半徑爲 1 時，這一個近似值就是 2π。

問題：你有很好的計算器，如工程用計算機，或 excel，請你使用這些工具，求出 2π 的近似值。

二、阿基米德螺線：

螺線的形成是：點 Q 繞著圓等速轉一圈，同時點 P 也等速的接近圓心 O，並在一圈後到達 O 點，則 P 點的軌跡就是阿基米德螺線。

阿基米德發現：$\overline{OP}$ 掃過的面積恰爲圓面積的 $\dfrac{1}{3}$。

仔細看圖 2：這 $\dfrac{1}{3}$ 還眞是恰當，阿基米德利用級數 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 與數列的夾擠定理得到上述的結果，很是美妙。

事實上，利用相同的方法，我們也可以得到直圓錐的體積爲三分之一的底面積乘以高 $(=\dfrac{1}{3}Ah=\dfrac{1}{3}\pi r^2h)$，對所有的錐體都有相同的結論，如圖 3。

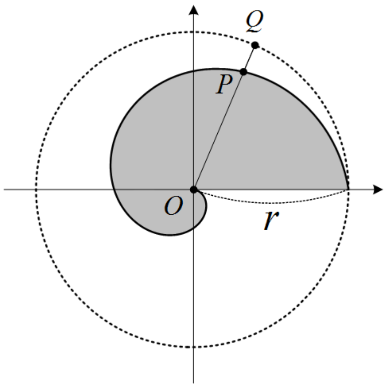

圖 2：阿基米德螺線

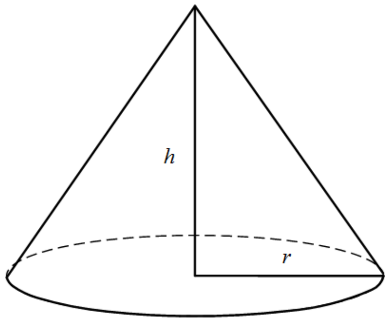

圖 3：直圓錐體積

問題：夾擠定理與阿基米德螺線有何關係呢？

4 結語

數列的夾擠定理就是積分的前身。

古時候的數學家對於一個熟悉但是卻未能確定求法的解，就利用夾擠定理來幫忙。阿基米德螺線和直圓椎的體積都有很棒的結論，而圓周率 π 則碰到計算上的困難，不容易計算，但是也因爲這樣的困難，讓數學家在求 π 的近似值中，發展出許多很棒的數學工具，其中「無窮級數的發展」，令人驚豔！

本學期課程到了研究積分時，我們會再碰到夾擠定理，屆時你可以看到更多有趣的內容。