

# 遞迴關係式

bee\*

105.2.22 ~ 105.2.22

遞迴關係式的目的是求出一般項的式子。

## 1 一個遞迴關係式

已知數列  $\langle a_n \rangle$  的遞迴關係式為  $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 1 \end{cases}$ ，求一般項  $a_n$  的表示法。

這一個問題當然有其典故，不過，這裡暫時不討論這一個典故，我們想得到這一個數列的一般項。作法如下：

$$\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_2 = 2a_1 + 1 \\ a_3 = 2a_2 + 1 \\ \vdots \\ a_{n-2} = 2a_{n-3} + 1 \\ a_{n-1} = 2a_{n-2} + 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{由下往上處理}} \\ \xrightarrow{\text{仔細觀察}} \end{array} \quad \begin{array}{l} 2^{n-1} a_1 = 2^{n-1} \\ 2^{n-2} a_2 = 2^{n-1} a_1 + 2^{n-2} \\ 2^{n-3} a_3 = 2^{n-2} a_2 + 2^{n-3} \\ \vdots \\ 2^2 a_{n-2} = 2^3 a_{n-3} + 2^2 \\ 2 a_{n-1} = 2^2 a_{n-2} + 2 \\ a_n = 2 a_{n-1} + 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} + \\ \hline a_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \end{array}$$

利用這一個方法我們就可以得到一般項的計算方法。

所謂的一般項，就是指利用常數與  $n$  來表示，這樣可以很方便的得到任一項的值。

## 2 檢查

最後記得檢查，把  $n$  用  $1, 2, 3, \dots$  代代看，看看是不是符合遞迴關係式，這樣就大功告成了。課本使用數學歸納法證明結論，不過，能不用數學歸納法更好，希望對你有幫助。

\*bee 美麗之家: <http://www2.chsh.chc.edu.tw/bee>