

特殊級數求和一

bee*

105.3.2 ~ 105.3.2

有一個級數和等於 $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ ，這一個和公式真是很美。
很美的原因是，它好像是 $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ 的推廣，
到底是哪一個級數的和這樣美麗呢？

1 看似複雜卻極好求和的級數

答案是： $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n \times (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ 。

這一個結論可以用分解的方式，即

$$\begin{aligned} & 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n \times (n+1) \\ &= 1 \times (1+1) + 2 \times (1+2) + \cdots + n \times (1+n) \\ &= (1+2+\cdots+n) + (1^2+2^2+\cdots+n^2) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}。 \end{aligned}$$

雖然利用這一個方法我們就可以得到級數和，但是不禁想問：這級數和怎這樣美麗，難道我們有很簡單的方法可以求得其和呢？

有疑問才有機會探究背後的道理，你不妨先想想看。

2 真相

我把作法寫到下一頁去。

*bee 美麗之家: <http://www2.chsh.chc.edu.tw/bee>

$$1 \times 2 = \frac{1}{3}(1 \times 2 \times 3 - 0 \times 1 \times 2)$$

$$2 \times 3 = \frac{1}{3}(2 \times 3 \times 4 - 1 \times 2 \times 3)$$

$$3 \times 4 = \frac{1}{3}(3 \times 4 \times 5 - 2 \times 3 \times 4)$$

...

$$n \times (n + 1) = \frac{1}{3}(n \times (n + 1) \times (n + 2) - (n - 1) \times n \times (n + 1))$$

利用上面的算式，你可以看出答案來了嗎？

事實上這一個級數比平方和級數 $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ 更容易求和，因為它可以使用「對消法」得到和公式，這一個方法是不是令你小開眼界呢？